

AULA 27

- Note bem: a leitura destes apontamentos não dispensa de modo algum a leitura atenta da bibliografia principal da cadeira
- Chama-se a atenção para a importância do trabalho pessoal a realizar pelo aluno resolvendo os problemas apresentados na bibliografia, sem consulta prévia das soluções propostas, análise comparativa entre as suas resposta e a respostas propostas, e posterior exposição junto do docente de todas as dúvidas associadas.

TÓPICOS

Exercícios.

27. Exercícios.

VERIFICAR SE UMA IMAGEM PODE RESULTAR DE UMA TRANSFORMAÇÃO LINEAR

27.1. Sendo

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 3 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$$

a matriz canónica da transformação linear $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, verifique se os vectores $\mathbf{w}_1 = (4, -10, 8)$, $\mathbf{w}_2 = (0, 0)$, $\mathbf{w}_3 = (-8, 2, -8)$, $\mathbf{w}_4 = (0, 0, 0)$ e $\mathbf{w}_5 = (3, 2, 1)$ pertencem à imagem (ou contradomínio) de T .

O vector $\mathbf{w}_2 = (0, 0)$ não pertence à imagem de T , dado que $\mathbf{w}_2 \in \mathbb{R}^2$ e o contradomínio de T está contido em \mathbb{R}^3 . O vector $\mathbf{w}_4 = (0, 0, 0)$ pertence, dado que, para toda a transformação linear, a imagem do vector nulo é o vector nulo ($\mathbf{0} = \mathbf{A}\mathbf{0}$).

Quanto aos vectores \mathbf{w}_1 , \mathbf{w}_3 e \mathbf{w}_5 podemos verificar se pertencem à imagem de T de diversos modos. Por exemplo, dado que \mathbf{A} é a matriz a transformação e tendo em atenção que

$$\mathbf{w} = \mathbf{A}\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 3 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{u}$$

temos

$$\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 3 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{u}_1$$

$$\begin{bmatrix} 4 \\ -10 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 3 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

Resolvendo o sistema



```
>> A=[1 -3;2 3;0 -4];
>> B=[4 -10 8]';
>> rref([A B])
ans =
     1     0    -2
     0     1    -2
     0     0     0
```

, concluímos que o sistema é possível, pelo que \mathbf{w}_1 é uma imagem da transformação. Aliás (dado que o sistema é possível e determinado) podemos mesmo concluir que $\mathbf{u}_1 = (-2, -2)$ é o objecto cuja imagem é \mathbf{w}_1 .

De modo idêntico temos

$$\mathbf{w}_3 = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 3 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{u}_3$$

$$\begin{bmatrix} -8 \\ 2 \\ -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 3 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

Resolvendo o sistema



```
>> A=[1 -3;2 3;0 -4];
>> B=[-8 2 -8]';
>> rref([A B])
ans =
     1     0    -2
     0     1     2
     0     0     0
```

, concluímos que o sistema é possível, pelo que \mathbf{w}_3 é uma imagem da transformação ($\mathbf{u}_3 = (-2, 2)$ é o objecto cuja imagem é \mathbf{w}_3).

Por último, temos

$$\mathbf{w}_5 = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 3 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{u}_5$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 3 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

Resolvendo o sistema



```
>> A=[1 -3;2 3;0 -4];
>> B=[3 2 1]';
>> rref([A B])
ans =
     1     0     0
     0     1     0
     0     0     1
```

, concluímos que o sistema é impossível, pelo que \mathbf{w}_3 não é uma imagem da transformação.

Outro modo de abordar a questão seria **determinar o subespaço de \mathbb{R}^3 gerado pelas colunas da matriz da transformação**. Ou seja, sendo $\mathbf{a}_1 = (1, 2, 2)$ e $\mathbf{a}_2 = (-3, 3, -4)$ os vectores correspondentes às colunas da matriz da transformação, uma imagem, $\mathbf{w} = (w_1, w_2)$, não é mais do que uma combinação linear destes vectores, sendo os coeficientes as coordenadas do objecto que lhe dá origem $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$

$$\mathbf{w} = u_1 \mathbf{a}_1 + u_2 \mathbf{a}_2$$

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 3 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$= \mathbf{A} \mathbf{u}$$

O problema pode assim ser interpretado como um problema de determinação de um subespaço gerado por um conjunto de vectores. Resolvendo o sistema

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 3 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

, recorrendo ao método de Gauss-Jordan, resulta



```
>> A=[1 -3;2 3;0 -4];
>> B=[w1 w2 w3]';
>> escalonar([A B])
```

$$\begin{bmatrix} 1, & -3, & w_1 \\ 2, & 3, & w_2 \\ 0, & -4, & w_3 \end{bmatrix}$$

Passo 1:

$$\begin{aligned} &(-2) * L_1 + L_2 \Rightarrow L_2 \\ &\begin{bmatrix} 1, & -3, & w_1 \\ 0, & 9, & w_2 - 2 * w_1 \\ 0, & -4, & w_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Passo 2:

$$\begin{aligned} &(1/9) * L_2 \Rightarrow L_2 \\ &\begin{bmatrix} 1, & -3, & w_1 \\ 0, & 1, & 1/9 * w_2 - 2/9 * w_1 \\ 0, & -4, & w_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Passo 3:

$$\begin{aligned} &(3) * L_2 + L_1 \Rightarrow L_1 \\ &(4) * L_2 + L_3 \Rightarrow L_3 \\ &\begin{bmatrix} 1, & 0, & 1/3 * w_1 + 1/3 * w_2 \\ 0, & 1, & 1/9 * w_2 - 2/9 * w_1 \\ 0, & 0, & w_3 + 4/9 * w_2 - 8/9 * w_1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Concluimos que, para que o sistema seja possível, deverá ser

$$w_3 + \frac{4}{9} w_2 - \frac{8}{9} w_1 = 0 \Leftrightarrow 8w_1 - 4w_2 - 9w_3 = 0$$

Fica assim determinada a condição que caracteriza o subespaço das imagens. Podemos verificar que $\mathbf{w}_1 = (4, -10, 8)$ e $\mathbf{w}_3 = (-8, 2, -8)$ verificam a restrição $(8 \times 4 - 4 \times (-10) - 9 \times 8) = 0$ e $8 \times (-8) - 4 \times 2 - 9 \times (-8) = 0$, e portanto pertencem à imagem da transformação, mas $\mathbf{w}_5 = (3, 2, 1)$ não verifica $(8 \times 3 - 4 \times 2 - 9 \times 1 \neq 0)$, e portanto não pertence à imagem.

 DETERMINAR A MATRIZ DA TRANSFORMAÇÃO DADOS UM CONJUNTO DE OBJECTOS E IMAGENS

27.2. Determine as matrizes canónicas das transformações

$$T_1(x_1, x_2) = (2x_1 - x_2, x_1 - 3x_2)$$

$$T_2(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + 2x_3, x_1 - x_2, x_2 - x_3)$$

$$T_3(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + 2x_3, x_1 - x_4, x_2 - x_3, x_1 - 3x_4)$$

Conhecida a expressão analítica da transformação a determinação da matriz canónica da transformação é imediata. Para $(w_1, w_2) = T_1(x_1, x_2) = (2x_1 - x_2, x_1 - 3x_2)$ temos

$$\begin{cases} w_1 = 2x_1 - x_2 \\ w_2 = x_1 - 3x_2 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

logo

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

Procedendo de modo análogo para $T_2(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + 2x_3, x_1 - x_2, x_2 - x_3)$, temos:

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

, e para $T_3(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + 2x_3, x_1 - x_4, x_2 - x_3, x_1 - 3x_4)$

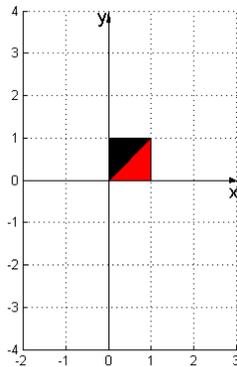
$$\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

27.3. Dada a transformação linear $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $T(\mathbf{e}_1) = (-1, 2, 0)$ e $T(\mathbf{e}_2) = (0, 2, -1)$ escreva a matriz da transformação.

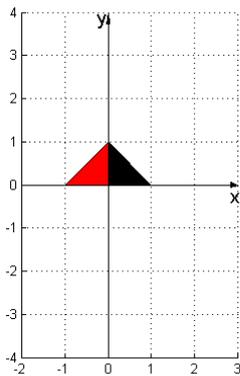
Sendo a matriz canónica da transformação dada por $\mathbf{A} = [T(\mathbf{e}_1) \ T(\mathbf{e}_2)]$, temos de imediato

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

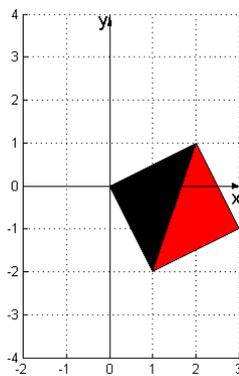
27.4. Diga quais das imagens, de b) a d), são compatíveis com uma transformação linear do objecto da figura a) e determine as transformações lineares correspondentes.



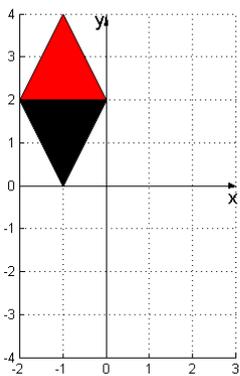
a)



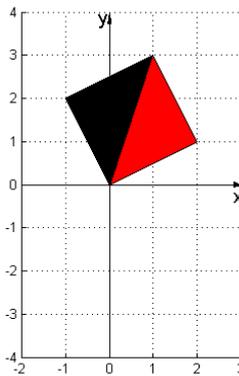
b)



c)



d)



e)

Dados um vector \mathbf{u} e um vector \mathbf{v} com a mesma direcção de \mathbf{u} , $\mathbf{v} = k\mathbf{u}$, e sendo a imagem de \mathbf{u} o vector $\mathbf{w} = \mathbf{A}\mathbf{u}$, temos

$$\begin{aligned} \mathbf{z} &= \mathbf{A}\mathbf{v} \\ &= \mathbf{A}k\mathbf{u} \\ &= k\mathbf{A}\mathbf{u} \\ &= k\mathbf{w} \end{aligned}$$

Numa transformação linear $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, vectores paralelos têm por imagem vectores paralelos, pelo que é imediato reconhecer que a imagem b) não resulta duma transformação linear do objecto a).

Numa transformação linear $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ a imagem do vector nulo é o vector nulo, $\mathbf{w} = \mathbf{A}\mathbf{0} = \mathbf{0}$, pelo que é imediato reconhecer que as imagens c) e d) não resultam duma transformação linear do objecto a).

Atendendo à imagem e), dado que

$$\begin{aligned} T(\mathbf{e}_1) &= T(1,0) = T(2,1) \\ T(\mathbf{e}_2) &= T(0,1) = T(-1,2) \end{aligned}$$

, e sendo a matriz da transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\mathbf{A} = [T(\mathbf{e}_1) \quad T(\mathbf{e}_2)]$, temos de imediato

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

A transformação linear em causa é, portanto,

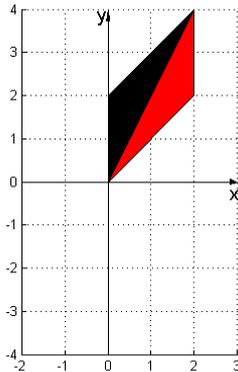
$$T(x_1, x_2) = (2x_1 - x_2, x_1 + 2x_2)$$

Por exemplo, para a diagonal do quadrado, temos

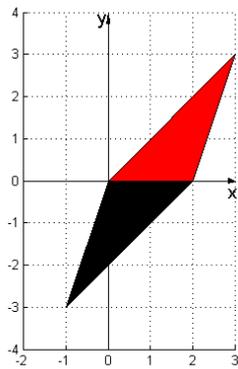
$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= \mathbf{A}\mathbf{u} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

27.5. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que transforma o paralelogramo da figura a) no paralelogramo da figura b). Qual das seguintes matrizes pode ser a matriz da transformação em causa

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 2/3 & 0 \\ -1/3 & -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 2 & -1/2 \\ 3 & -3/2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1/3 \\ 2 & -4/3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}_4 = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$



a)



b)

Basta atender a que

$$T(0,2) = (-1,-3)$$

Ora, sendo

$$T(0,2) = \mathbf{A} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \mathbf{A} 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{A} 2\mathbf{e}_2 = 2\mathbf{A}\mathbf{e}_2 = 2T(\mathbf{e}_2) = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

, temos

$$T(\mathbf{e}_2) = \begin{bmatrix} -1/2 \\ -3/2 \end{bmatrix}$$

, pelo que, das matrizes candidatas a única que pode ser a matriz da transformação em causa é a matriz \mathbf{A}_2 .

Escolhendo dois vectores linearmente independentes, por exemplo, $\mathbf{u}_1 = (0,2)$ e $\mathbf{u}_2 = (2,4)$, temos $\mathbf{w}_1 = T(\mathbf{u}_1) = (-1,-3)$ e $\mathbf{w}_2 = T(\mathbf{u}_2) = (2,0)$, pelo que, sendo

$$\mathbf{w} = \mathbf{A}\mathbf{u}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{w}_1 & \mathbf{w}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \mathbf{A}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1/2 \\ 3 & -3/2 \end{bmatrix} = \mathbf{A}$$

Genericamente

$$\mathbf{A} = [\mathbf{w}_1 \quad \mathbf{w}_2][\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2]^{-1}$$



```
>> u1=[0 2]';
>> u2=[2 4]';
>> w1=[-1 -3]';
>> w2=[ 2 0]';
>> A=[w1 w2]*inv([u1 u2])
A =
```

```
2 -1/2
3 -3/2
```