

# AULA 29

- Note bem: a leitura destes apontamentos não dispensa de modo algum a leitura atenta da bibliografia principal da cadeira
- Chama-se a atenção para a importância do trabalho pessoal a realizar pelo aluno resolvendo os problemas apresentados na bibliografia, sem consulta prévia das soluções propostas, análise comparativa entre as suas resposta e a respostas propostas, e posterior exposição junto do docente de todas as dúvidas associadas.

## TÓPICOS

Diagonalização de matrizes simétricas.

Decomposição espectral

## 29. Diagonalização.

### 29.1. Diagonalização de matrizes simétricas. Decomposição espectral.

Recordemos que uma matriz quadrada  $\mathbf{A}$ ,  $n \times n$ , é simétrica se  $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$  e é ortogonal se  $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T$  (isto é  $\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{I}_n$ ).

Sabe-se que, se  $\mathbf{A}$  é uma matriz real simétrica, os valores próprios de  $\mathbf{A}$  são números reais e os vectores próprios associados a valores próprios distintos são ortogonais.

Para além disso, toda a matriz simétrica é diagonalizável.

De todos estes resultados conclui-se que, se  $\mathbf{A}$  é uma matriz real simétrica de ordem  $n$ , então  $\mathbf{A}$  é diagonalizável por uma matriz ortogonal, isto é, existe uma matriz ortogonal  $\mathbf{Q}$  e uma matriz diagonal  $\mathbf{D}$  tais que

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q}^T$$

Do que foi visto na aula 28,

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

é a matriz cujos elementos diagonais são os valores próprios de  $\mathbf{A}$ , listados por certa ordem, e  $\mathbf{Q}$  é a matriz obtida a partir de vectores próprios de  $\mathbf{A}$  *normalizados*, listados por ordem correspondente à de  $\mathbf{D}$ .

A factorização  $\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q}^T$  pode ser escrita na forma

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{q}_i \mathbf{q}_i^T$$

, onde  $\mathbf{q}_i$  é a coluna  $i$  da matriz  $\mathbf{Q}$ , chamada **decomposição espectral** da matriz  $\mathbf{A}$ .

**Exemplo**

1. Dada a matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

, determinamos os seus valores próprios a partir do polinómio característico. Sendo

$$\begin{aligned} p(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) &= \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (2-\lambda)((2-\lambda)^2 - 1) \\ &= (2-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 3) \end{aligned}$$

, os valores próprios de  $\mathbf{A}$  são  $\lambda_1 = 3$ ,  $\lambda_2 = 2$ , e  $\lambda_3 = 1$

Podemos agora determinar os vectores próprios associados resolvendo os sistemas homogéneos correspondentes.

Para  $(\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$  temos

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

, pelo que o conjunto de todos os vectores próprios associados a  $\lambda_1 = 3$  satisfaz

$$\begin{cases} x_1 = -x_2 \\ x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

, com  $k \neq 0$ .

Para  $(\mathbf{A} - \lambda_2\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$  temos

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

, pelo que o conjunto de todos os vectores próprios associados a  $\lambda_2 = 2$  satisfaz

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

, com  $k \neq 0$ .

Para  $(\mathbf{A} - \lambda_3\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$  temos

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

, pelo que o conjunto de todos os vectores próprios associados a  $\lambda_3 = 1$  satisfaz

$$\begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

, com  $k \neq 0$ .

A matriz  $\mathbf{A}$  tem 3 valores próprios diferentes, pelo que os vectores próprios associados são ortogonais. Temos

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{V} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Normalizando cada uma dos vectores próprios obtemos a matriz

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Temos então a matriz  $\mathbf{A}$  diagonalizada por uma matriz ortogonal:

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q}^T = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$$

, como podemos verificar



```
>> A=[2 -1 0;-1 2 0;0 0 2];
>> [V D]=eig(A);
>> V*D*V'
ans =
    2.0000    -1.0000         0
   -1.0000     2.0000         0
         0         0     2.0000
```

## Exercícios.

### DIAGONALIZAÇÃO DE MATRIZES SIMÉTRICAS

**29.1.** Determinemos a matriz ortogonal que diagonaliza a matriz simétrica

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

A matriz  $\mathbf{A}$  tem valores próprios  $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$  e  $\lambda_3 = 4$ . Ao valor próprio  $\lambda_{1,2} = 2$  estão associados os vectores próprios  $\mathbf{v}_1 = [1 \ 1 \ 0]^T$  e  $\mathbf{v}_2 = [0 \ 0 \ 1]^T$ , e ao valor próprio  $\lambda_3 = 4$  o vector próprio  $\mathbf{v}_3 = [1 \ -1 \ 0]^T$  (como poderíamos deduzir pelo método habitual).

Como a matriz tem valores próprios iguais não temos a garantia que os vectores próprios  $\mathbf{v}_1$  e  $\mathbf{v}_2$  sejam ortogonais.  $\mathbf{v}_3$  é necessariamente ortogonal a  $\mathbf{v}_1$  e  $\mathbf{v}_2$ . Quanto a estes dois, dado que estão associados a valores próprio iguais, é necessário verificar. Temos

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = [1 \ 1 \ 0] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

Os vectores são ortogonais, pelo que basta construir a matriz cujas colunas são os vectores próprios encontrados e normalizar cada um deles para obter a matriz ortogonal que diagonaliza  $\mathbf{A}$

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Podemos verificar



```
>> A=[3 -1 0;-1 3 0;0 0 2];
```

```
>> [V D]=eig(A)
```

```
V =
```

```
   -0.7071         0   -0.7071
   -0.7071         0    0.7071
         0    1.0000         0
```

```
D =
```

```
    2    0    0
    0    2    0
    0    0    4
```

```
>> V*D*V'
ans =
    3.0000    -1.0000         0
   -1.0000     3.0000         0
         0         0     2.0000
```

(Nota: Se  $\mathbf{A}$  for uma matriz simétrica, em resultado do algoritmo utilizado no cálculo pelo MatLab, a função `eig(A)` devolve uma matriz ortogonal de vectores próprios.)

**29.2.** Determinemos a matriz ortogonal que diagonaliza a matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

A matriz  $\mathbf{A}$  tem valores próprios  $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ , e  $\lambda_3 = 8$ . Ao valor próprio  $\lambda_{1,2} = 2$  estão associados os vectores próprios  $\mathbf{v}_1 = [-1 \ 1 \ 0]^T$  e  $\mathbf{v}_2 = [-1 \ 0 \ 1]^T$  e ao valor próprio  $\lambda_3 = 8$  o vector próprio  $\mathbf{v}_3 = [1 \ 1 \ 1]^T$  (como poderíamos deduzir pelo método habitual).

Como a matriz tem valores próprios iguais não temos a garantia que os vectores próprios  $\mathbf{v}_1$  e  $\mathbf{v}_2$  sejam ortogonais.  $\mathbf{v}_3$  é necessariamente ortogonal a  $\mathbf{v}_1$  e  $\mathbf{v}_2$ . Quanto aos dois últimos temos

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = [-1 \ 1 \ 0] \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 2$$

, pelo que os vectores não são ortogonais. É por isso necessário, recorrendo ao método de Gram-Schmidt, encontrar uma base ortogonal para o subespaço próprio  $\mathbb{E}_2$ . Temos

$$1. \mathbf{v}'_1 = \mathbf{v}_1 = [-1 \ 1 \ 0]^T$$

$$2. \mathbf{v}'_2 = \mathbf{v}_2 - \text{proj}_{\mathbf{v}'_1} \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}'_1}{\mathbf{v}'_1 \cdot \mathbf{v}'_1} \mathbf{v}'_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Ficamos assim com 3 vectores ortogonais. Basta, agora, construir a matriz dos vectores próprios e normalizar cada um deles para obter a matriz ortogonal que diagonaliza a matriz  $\mathbf{A}$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

Podemos verificar que a matriz é ortogonal, e que diagonaliza a matriz  $\mathbf{A}$



```

>> Q=[-1/sqrt(2) -1/sqrt(6) 1/sqrt(3);...
      1/sqrt(2) -1/sqrt(6) 1/sqrt(3);...
      0      2/sqrt(6) 1/sqrt(3)];
>> Q'*Q
ans =
      1.0000         0         0
         0      1.0000         0
         0         0      1.0000
>> D=[2 0 0;0 2 0;0 0 8];
>> Q*D*Q'
ans =
      4.0000      2.0000      2.0000
      2.0000      4.0000      2.0000
      2.0000      2.0000      4.0000

```

**29.3.** Conhecidos os valores próprios e a matriz  $\mathbf{Q}$ , podemos escrever a matriz  $\mathbf{A}$  na forma da sua decomposição espectral

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{q}_i \mathbf{q}_i^T$$

Temos então

$$M_1 = \mathbf{q}_1 \mathbf{q}_1^T = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_2 = \mathbf{q}_2 \mathbf{q}_2^T = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/6 & 1/6 & -1/3 \\ 1/6 & 1/6 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$$

$$M_3 = \mathbf{q}_3 \mathbf{q}_3^T = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

, pelo que, e reordenando os valores próprios por ordem decrescente, a decomposição espectral da matriz  $\mathbf{A}$  é

$$\mathbf{A} = 8 \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1/6 & 1/6 & -1/3 \\ 1/6 & 1/6 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Se  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ , temos

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M}_i \mathbf{u} &= \mathbf{q}_i \mathbf{q}_i^T \mathbf{u} = \mathbf{q}_i (\mathbf{u}^T \mathbf{q}_i)^T = \mathbf{q}_i (\mathbf{u} \cdot \mathbf{q}_i)^T \\
 &= \mathbf{q}_i (\mathbf{u} \cdot \mathbf{q}_i) && \text{(dado que } \mathbf{u} \cdot \mathbf{q}_i \text{ é um escalar)} \\
 &= (\mathbf{u} \cdot \mathbf{q}_i) \mathbf{q}_i \\
 &= \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{q}_i}{\mathbf{q}_i \cdot \mathbf{q}_i} \mathbf{q}_i && \text{(dado que } \|\mathbf{q}_i\| = 1) \\
 &= \text{proj}_{\mathbf{q}_i} \mathbf{u}
 \end{aligned}$$

Cada uma das matrizes  $\mathbf{M}_i = \mathbf{q}_i \mathbf{q}_i^T$  corresponde à matriz de projecção no subespaço gerado por  $\mathbf{q}_i$ , ou seja, corresponde à matriz de projecção no subespaço próprio  $\mathbb{E}_{\lambda_i}$ , caso a multiplicidade geométrica de  $\lambda_i$  seja 1.

Por exemplo, para  $\mathbf{u} = [1 \ 2 \ 3]^T$



```

>> q1=Q(:,1); q2=Q(:,2); q3=Q(:,3);
>> M1=q1*q1'; M2=q2*q2'; M3=q3*q3';
>> u=[1 2 3]';
>> [(u'*q3)*q3 (u'*q2)*q2 (u'*q1)*q1]
ans =
     2     -1/2    -1/2
     2     -1/2     1/2
     2         1         0
>> [M3*u M2*u M1*u]
ans =
     2     -1/2    -1/2
     2     -1/2     1/2
     2         1         0

```

, temos  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_3 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_1$ , sendo  $\mathbf{u}_3 = [2 \ 2 \ 2]^T$ ,  $\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_1 = [-1/2 \ -1/2 \ 1]^T + [-1/2 \ 1/2 \ 0]^T$ , as projecções de  $\mathbf{u}$  sobre cada um dos subespaços próprios de  $\mathbf{A}$ . A transformação linear  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  a que a matriz  $\mathbf{A}$  está associada transforma o vector  $\mathbf{u}$  no vector  $\mathbf{w} = \mathbf{A}\mathbf{u} = 8\mathbf{u}_3 + 2\mathbf{u}_2 + 2\mathbf{u}_1$



```

>> 8*M3*u + 2*M2*u + 2*M1*u
ans =
    14
    16
    18
>> w=A*u
w =
    14
    16
    18

```

---

**DETERMINAR UMA MATRIZ COM VALORES E VECTORES PRÓPRIOS ESPECÍFICOS**


---

Determinar uma matriz simétrica com valores e vectores próprios (ortogonais) específicos é trivial, quer a partir da decomposição  $\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q}^T$ , quer a partir da decomposição espectral da matriz  $\mathbf{A} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{q}_i \mathbf{q}_i^T$ .

**29.4.** Determinar a matriz simétrica  $\mathbf{A}$  com valores próprios  $\lambda_1 = 4$  e  $\lambda_2 = 2$ , e vectores próprios  $\mathbf{v}_1 = [-1 \ 1]^T$  e  $\mathbf{v}_2 = [1 \ 1]^T$ .

Sendo  $\mathbf{v}_1$  e  $\mathbf{v}_2$  ortogonais, basta calcular o respectivos versores  $\mathbf{q}_1 = [-1/\sqrt{2} \ 1/\sqrt{2}]^T$  e  $\mathbf{q}_2 = [1/\sqrt{2} \ 1/\sqrt{2}]^T$ , resultando

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q}^T = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$



```
>> D=[4 0;0 2];
>> Q=[-1/sqrt(2) 1/sqrt(2); 1/sqrt(2) 1/sqrt(2)];
>> A=Q*D*Q'
```

**A =**

3.0000	-1.0000
-1.0000	3.0000