

AULA 31

- Note bem: a leitura destes apontamentos não dispensa de modo algum a leitura atenta da bibliografia principal da cadeira
- Chama-se a atenção para a importância do trabalho pessoal a realizar pelo aluno resolvendo os problemas apresentados na bibliografia, sem consulta prévia das soluções propostas, análise comparativa entre as suas resposta e a respostas propostas, e posterior exposição junto do docente de todas as dúvidas associadas.

TÓPICOS

Valores singulares.

Decomposição em valores singulares.

Interpretação geométrica.

SVD e os 4 espaços fundamentais de uma matriz.

31. Decomposição em valores singulares.

31.1. Valores singulares.

Dada uma matriz $\mathbf{A}$, $m \times n$, a matriz $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$, $n \times n$, é uma matriz simétrica com n valores próprios reais não negativos, iguais ou distintos, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

Designam-se por **valores singulares** da matriz $\mathbf{A}$ as n raízes quadradas dos valores próprios da matriz $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$, $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$.

Exemplo

1. Dada a matriz rectangular, 3×2 ,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

temos

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

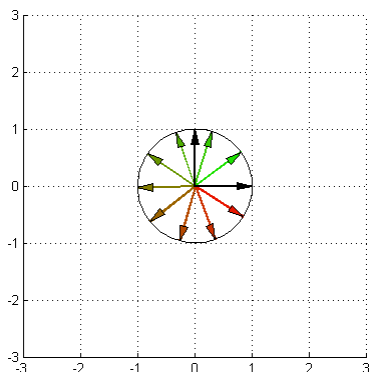


Figura 31.1

A matriz $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ tem $n = 2$ valores próprios, raízes do polinómio característico $p(\lambda) = (1 - \lambda)(4 - \lambda)$, $\lambda_1 = 4$ e $\lambda_2 = 1$, pelo que a matriz $\mathbf{A}$ tem valores singulares

$$\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1} = 2$$

e

$$\sigma_2 = \sqrt{\lambda_2} = 1$$

Na figuras 31.1 e 31.2 mostra-se, respectivamente, um conjunto de versores objecto, com extremidades sobre a circunferência de raio

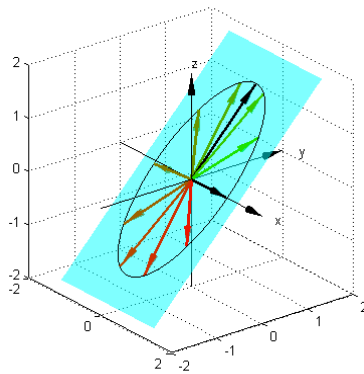


Figura 31.2

unitário, em $\mathbb{R}^2$, e os respectivos vectores imagem, em $\mathbb{R}^3$, resultantes da transformação linear $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ a que a matriz $\mathbf{A}$ está associada, que constituem um conjunto de vectores com extremidade sobre uma elipse em $\mathbb{R}^3$.

A matriz $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ tem vectores próprios de norma unitária $\mathbf{v}_1 = [0 \ 1]^T$ e $\mathbf{v}_2 = [1 \ 0]^T$, assinalados a preto na figura 31.1. As suas imagens, assinaladas a preto na figura 31.2, estão sobre os eixos da elipse, e são vectores de comprimento $\sigma_1 = 2$ e $\sigma_2 = 1$. Na verdade, considerando um valor próprio da matriz $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$, λ , e o correspondente vector próprio de norma unitária $\mathbf{v}$, temos, em geral

$$\begin{aligned} \|\mathbf{A}\mathbf{v}\|^2 &= (\mathbf{A}\mathbf{v}) \cdot (\mathbf{A}\mathbf{v}) = (\mathbf{A}\mathbf{v})^T (\mathbf{A}\mathbf{v}) = \mathbf{v}^T \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{v} = \mathbf{v}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{v}) \\ &= \mathbf{v}^T \lambda \mathbf{v} = \lambda (\mathbf{v}^T \mathbf{v}) = \lambda (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = \lambda \|\mathbf{v}\|^2 = \lambda \end{aligned}$$

e, portanto, os vectores imagem dos vectores próprios de norma unitária têm comprimento igual ao valor singular associado

$$\mathbf{w} = \|\mathbf{A}\mathbf{v}\| = \sqrt{\lambda} = \sigma$$

31.2. Decomposição em valores singulares (SVD).

Vimos que uma matriz quadrada $\mathbf{A}$, $n \times n$, é diagonalizável, $\mathbf{A} = \mathbf{P} \mathbf{D} \mathbf{P}^{-1}$, sse possui n vectores próprios linearmente independentes, sendo $\mathbf{P}$ a matriz dos vectores próprios e $\mathbf{D}$ a matriz diagonal dos valores próprios da matriz $\mathbf{A}$, escritos por ordem correspondente à de $\mathbf{D}$.

Vimos também que, se $\mathbf{A}$ for uma matriz simétrica é diagonalizável, $\mathbf{A} = \mathbf{Q} \mathbf{D} \mathbf{Q}^T$, por uma matriz ortogonal $\mathbf{Q}$, obtida a partir dos vectores próprios de $\mathbf{A}$.

Tem-se que toda a matriz $\mathbf{A}$, $m \times n$, é factorizável na forma

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \Sigma \mathbf{V}^T$$

, chamada **decomposição em valores singulares** da matriz $\mathbf{A}$, sendo $\mathbf{V}$ uma matriz ortogonal $n \times n$, construída a partir de um conjunto ortonormado de vectores próprios da matriz $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$, $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$, $\mathbf{U}$ uma matriz ortogonal $m \times m$, cujos elementos são determinados por

$$\mathbf{u}_i = \frac{1}{\sigma_i} \mathbf{A} \mathbf{v}_i$$

, e, tendo $\mathbf{A}$ r valores singulares não nulos, Σ é uma matriz $m \times n$ da forma

$$\Sigma = \left[\begin{array}{cc} \overbrace{\mathbf{D}}^r & \overbrace{\begin{matrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{matrix}}^{n-r} \\ \underbrace{\begin{matrix} 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{matrix}}_{m-r} & \end{array} \right] \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} r \\ m-r \end{array}, \text{ em que } \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sigma_r \end{bmatrix}$$

De modo análogo à decomposição espectral de uma matriz simétrica, a matriz $\mathbf{A}$, $m \times n$, com r valores singulares não nulos, pode ser escrita na forma

$$\mathbf{A} = \sigma_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{v}_1^T + \cdots + \sigma_r \mathbf{u}_r \mathbf{v}_r^T = \sum_{i=1}^r \sigma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T$$

, em que $\mathbf{u}_i$ são colunas de $\mathbf{U}$, ditos *vectoros singulares à esquerda*, e $\mathbf{v}_i$ são colunas de $\mathbf{V}$, ditos *vectoros singulares à direita*.

Exemplo

2. Consideremos de novo a matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Como vimos

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

tem valores próprios $\lambda_1 = 4$ e $\lambda_2 = 1$, a que estão associados os vectoros próprios unitários $\mathbf{v}_1 = [0 \ 1]^T$ e $\mathbf{v}_2 = [1 \ 0]^T$, pelo que a matriz $\mathbf{A}$ tem valores singulares $\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1} = 2$ e $\sigma_2 = \sqrt{\lambda_2} = 1$. Podemos de imediato escrever a matriz diagonal dos valores singulares

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

, e a matriz Σ , de dimensão $m \times n = 3 \times 2$,

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \mathbf{D} \\ 0 \ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{V}$ é uma matriz ortogonal $n \times n$, portanto do tipo de $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$, no caso presente, 2×2 . Para construir $\mathbf{V}$ basta encontrar um conjunto ortonormado de vectoros próprios da matriz $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$, $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$, associados a cada um dos n valores singulares. No caso presente, temos de imediato

$$\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{U}$ é uma matriz ortogonal $m \times m$, cujos elementos são determinados por

$$\mathbf{u}_i = \frac{1}{\sigma_i} \mathbf{A} \mathbf{v}_i$$

Tendo $\mathbf{A}$ r valores singulares não nulos, ficam assim encontradas r colunas da matriz $\mathbf{U}$. Caso tenhamos $r < m$ será necessário determinar os restantes $m - r$ vectoros de $\mathbb{R}^m$ convenientes (por exemplo recorrendo à ortogonalização de Gram-Schmidt tendo por base os versores canónicos).

No caso presente temos $m \times m = 3 \times 3$ e $r = 2$, pelo que, de imediato, temos

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sigma_1} \mathbf{A} \mathbf{v}_1 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sigma_2} \mathbf{A} \mathbf{v}_2 = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

, sendo agora necessário determinar um vector unitário ortogonal a $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$.

Considerando a base $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{e}_3\}$, temos

$$\begin{aligned} \mathbf{u}'_3 &= \mathbf{e}_3 - \text{proj}_{\mathbf{u}_2} \mathbf{e}_3 - \text{proj}_{\mathbf{u}_1} \mathbf{e}_3 \\ &= \mathbf{e}_3 - \frac{\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{u}_2}{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2} \mathbf{u}_2 - \frac{\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1} \mathbf{u}_1 = \mathbf{e}_3 - (\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{u}_2) \mathbf{u}_2 - (\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{u}_1) \mathbf{u}_1 \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - 1/\sqrt{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

e

$$\mathbf{u}_3 = \frac{\mathbf{u}'_3}{\|\mathbf{u}'_3\|} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Temos então

$$\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2 \quad \mathbf{u}_3] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Ficando assim determinada a decomposição em valores singulares da matriz $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \mathbf{\Sigma} \mathbf{V}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

, como podemos confirmar



```
>> x=1/sqrt(2);
>> A=[1 0; 0 sqrt(2); 0 sqrt(2)];
>> U=[0 1 0; x 0 -x; x 0 x];
>> S=[2 0; 0 1; 0 0];
>> V=[0 1; 1 0];
>> U*S*V'
```

```
ans =
    1.0000         0
         0    1.4142
         0    1.4142
```

Podemos ainda decompor $\mathbf{A}$ na forma

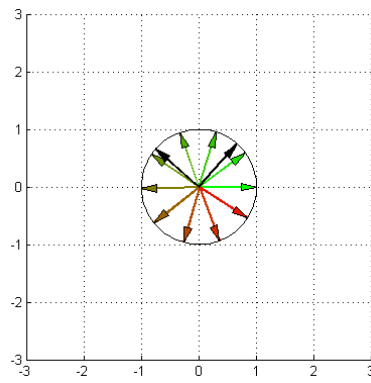
$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= \sum_{i=1}^r \sigma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T = \sigma_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{v}_1^T + \sigma_2 \mathbf{u}_2 \mathbf{v}_2^T \\ &= 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Embora possamos recorrer ao MatLab para proceder ao cálculos das matrizes $\mathbf{U}$, Σ , e $\mathbf{V}$, conforme acima ficou descrito, o procedimento é desnecessário, dada a existência da função **svd(A)**, que procede à decomposição em valores singulares da matriz $\mathbf{A}$

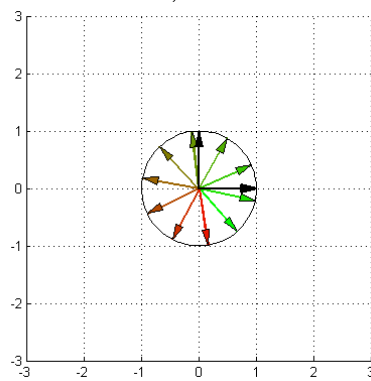


```
>> A=[1 0; 0 sqrt(2); 0 sqrt(2)];
>> [U S V]=svd(A)
>> U =
         0    1.0000         0
    -0.7071         0   -0.7071
    -0.7071         0    0.7071
>> S =
    2.0000         0
         0    1.0000
         0         0
>> V =
         0     1
        -1     0
```

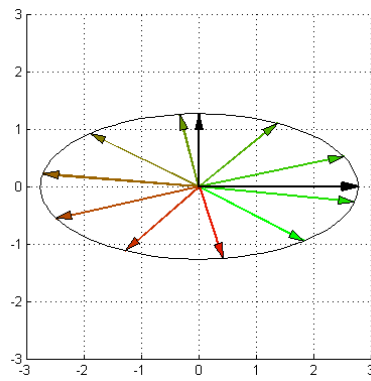
31.3. Interpretação geométrica.



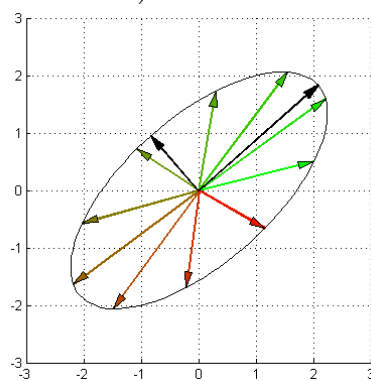
a) $\mathbf{u}$



b) $\mathbf{V}^T \mathbf{u}$



c) $\Sigma \mathbf{V}^T \mathbf{u}$



d) $\mathbf{w} = \mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^T\mathbf{u}$

Figura 31.3

Consideremos a transformação linear $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, em que a matriz da transformação é

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1/2 & 2 \end{bmatrix}$$

A figura a) mostra um conjunto de vectores com extremidade sobre a circunferência de raio unitário, e a figura d) as imagens resultantes da transformação, $\mathbf{w} = \mathbf{A}\mathbf{u}$, estando assinalados a preto os vectores próprios de $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$. Podemos verificar que $\mathbf{A}$ tem uma decomposição em valores singulares

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^T = \begin{bmatrix} 0.75 & -0.66 \\ 0.66 & 0.75 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.75 & 0 \\ 0 & 1.27 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.66 & 0.75 \\ -0.75 & 0.66 \end{bmatrix}$$

(para uma maior clareza de exposição, os valores são aproximados e são omitidos os passos intermédios). Atendendo à decomposição de $\mathbf{A}$ em valores singulares, a transformação T pode ser interpretada como uma composição de 3 transformações lineares $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ com matrizes $\mathbf{V}^T$, Σ e $\mathbf{U}$. A matriz

$$\mathbf{V}^T = \begin{bmatrix} 0.66 & 0.75 \\ -0.75 & 0.66 \end{bmatrix}$$

tem a estrutura de uma matriz de rotação em $\mathbb{R}^2$

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

, com $\theta \approx -49^\circ$. As imagens $\mathbf{V}^T \mathbf{u}$ resultam de uma rotação de $\approx 49^\circ$ em sentido inverso, como se pode ver na figura b), ficando os vectores próprios de $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ alinhados com os eixos coordenados. A matriz

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 2.75 & 0 \\ 0 & 1.27 \end{bmatrix}$$

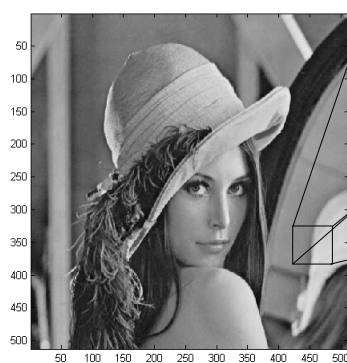
vai em seguida multiplicar cada um dos vectores próprios de $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ por $\sigma_1 = 2.75$ $\sigma_1 = 2.75$ (e cada um dos outros vectores por uma combinação linear de σ_1 e σ_2) transformando a circunferência de raio unitário numa elipse de semieixos σ_1 e σ_2 . Finalmente a matriz

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 0.75 & -0.66 \\ 0.66 & 0.75 \end{bmatrix}$$

que tem a estrutura de uma matriz de rotação em $\mathbb{R}^2$, com $\theta \approx 41^\circ$, provoca uma rotação em sentido directo de $\approx 41^\circ$.

Todas os produtos matriciais são susceptíveis desta interpretação geométrica, dado que toda a matriz pode se decomposta na forma $\mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^T$.

31.4. Aplicação: Compressão de imagem.



a) $n=512$

146	133	116	95	74	61
142	125	108	87	67	60
138	120	102	81	64	59
130	110	91	75	64	63
126	104	87	74	65	65
117	94	80	73	68	67
107	84	74	72	71	70
98	77	70	72	73	71
90	74	69	72	73	72
86	73	71	73	73	72

Consideremos a imagem com 512×512 pixels que se reproduz na figura a). Cada um dos pixels da imagem corresponde a um número inteiro entre 0 e 255, relativo a 1 de 256 níveis de cinzento, constituindo toda a imagem uma matriz de $512 \times 512 = 262144$ números.

Decompondo a matriz em valores singulares,

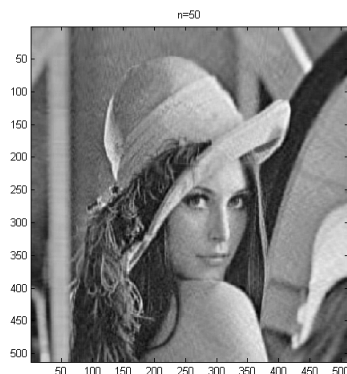
$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T$$

, podemos verificar que os seus 512 valores singulares, σ_i , se distribuem por 10^6 ordens de grandeza, sendo o maior dos valores $\sigma_1 \approx 5 \times 10^4$, e o menor $\sigma_{512} \approx 2 \times 10^{-2}$, como podemos ver na figura d) (note a escala logarítmica).

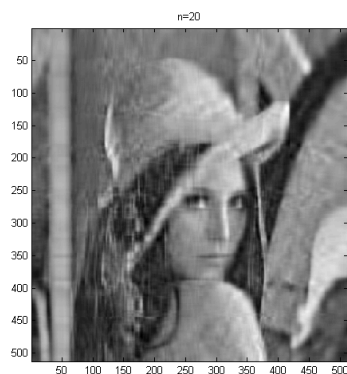
Se fizermos a decomposição espectral da matriz,

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{512} \sigma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T$$

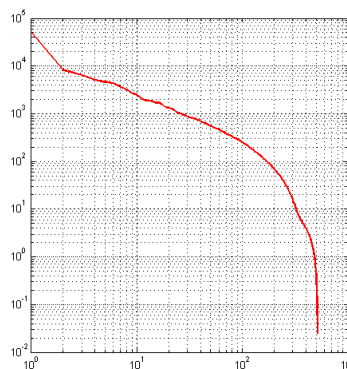
, e sendo os coeficientes das matrizes $\mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T$ todos, em módulo, menores que 1, dado que os vectores próprios à esquerda e à direita, $\mathbf{u}_i$ e $\mathbf{v}_i$, são vectores normalizados, resulta que cada uma das parcelas, $\sigma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T$, contribui de modo muito diferente para a matriz final.



b) $n=50$



c) $n=20$



d) valores singulares

As figuras a) a c) mostram as imagens resultantes de se considerar o total das componentes espectrais, e apenas as 50 e 20 mais importantes, isto é, associadas aos 50 e 20 valores singulares de maior valor. Note que, sendo necessário $512 \times 512 = 262144$ números para reproduzir a imagem original, a imagem que utiliza apenas 50 componentes espectrais necessita de apenas 50 valores singulares mais 50 vectores $\mathbf{u}$ e 50 vectores $\mathbf{v}$, cada um de dimensão 512, ou seja $50 \times (1 + 512 + 512) = 51250$ números, cerca de 5 vezes menos informação.

A decomposição de imagens em valores singulares está na base de alguns dos mais eficientes algoritmos de compressão de imagem, que estudará nas cadeiras da especialidade. O armazenamento e transmissão de dados têm um papel extremamente importante no actual panorama tecnológico, e o estudo das técnicas que permitam a sua execução com o mínimo espaço de armazenamento e o menor tempo de processamento será objecto de análise ao longo do curso. Na maioria das técnicas são extremamente relevantes os considerandos de ordem estatística e numérica, que transcendem o âmbito desta cadeira, e em que terá oportunidade de se iniciar nas cadeiras dos próximos semestres.

31.5. SVD e os 4 espaços fundamentais de uma matriz.

Seja $\mathbf{A} = \mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^T$ a decomposição em valores singulares da matriz $\mathbf{A}$, $m \times n$, com r valores singulares não nulos, então

1. A matriz $\mathbf{A}$ tem característica r .
2. $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r\}$ é uma base ortonormada de $\text{col}(\mathbf{A})$.
3. $\{\mathbf{u}_{r+1}, \dots, \mathbf{u}_m\}$ é uma base ortonormada de $\text{Ker}(\mathbf{A}^T)$.
4. $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r\}$ é uma base ortonormada de $\text{lin}(\mathbf{A})$.
5. $\{\mathbf{v}_{r+1}, \dots, \mathbf{v}_n\}$ é uma base ortonormada de $\text{Ker}(\mathbf{A})$.

Exemplo

3. Recordemos a análise que foi feita nos exercícios 20.1 a 20.4 da aula 20 sobre os espaços fundamentais da matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

Vimos que matriz tem característica 3, formando os vectores

$$\mathbf{u}_1 = [1 \ 0 \ 0 \ 0]^T, \mathbf{u}_2 = [0 \ 1 \ 0 \ 6]^T \text{ e } \mathbf{u}_3 = [0 \ 0 \ 1 \ 3]^T$$

uma base do espaço coluna de $\mathbf{A}$, o vector

$$\mathbf{u}_4 = [0 \ -6 \ -3 \ 1]^T$$

uma base do núcleo de $\mathbf{A}^T$, os vectores

$$\mathbf{v}_1 = [1 \ 0 \ 1 \ 0 \ -2]^T, \mathbf{v}_2 = [0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 3]^T \text{ e } \mathbf{v}_3 = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 4]^T$$

uma base do espaço linha de $\mathbf{A}$, e os vectores

$$\mathbf{v}_4 = [-1 \ -1 \ 1 \ 0 \ 0]^T, \text{ e } \mathbf{v}_5 = [2 \ -3 \ 0 \ -4 \ 1]^T$$

uma base do núcleo de $\mathbf{A}$.

Calculemos a decomposição em valores singulares da matriz $\mathbf{A}$



```
>> A=[2 1 3 1 3; 1 -1 0 1 -1;-1 2 1 -2 0; 3 0 3 0 -6];
```

```
>> [U S V]=svd(A)
```

```
U =
```

```
    0.0982    -0.9910     0.0911     0.0000
   -0.1738     0.0225     0.4321   -0.8847
    0.0211   -0.0801   -0.8930   -0.4423
   -0.9796   -0.1051   -0.0867     0.1474
```

```
S =
```

```
    7.4765         0         0         0         0
         0     4.8770         0         0         0
```

0	0	3.5096	0	0
0	0	0	0.0000	0

$V =$

-0.3929	-0.4500	0.3554	0.7136	-0.0873
0.0420	-0.2406	-0.6060	0.0811	-0.7526
-0.3508	-0.6906	-0.2507	-0.4606	0.3534
-0.0157	-0.1658	0.6580	-0.5060	-0.5323
0.8488	-0.4849	0.1031	0.1265	0.1331

Como vemos, por análise da matriz S , a matriz A tem $r = 3$ valores singulares não nulos, ou seja, a matriz tem característica $r = 3$.

As primeiras $r = 3$ colunas da matriz U formam uma base ortonormada de $\text{col}(A)$. Fazendo



```
>> rref(U(:,1:3)')
ans =
    1.0000         0         0    0.0000
         0    1.0000         0    6.0000
         0         0    1.0000    3.0000
```

confirmamos que as primeiras 3 colunas de U são versores de $\mathbf{u}_1 = [1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$, $\mathbf{u}_2 = [0 \ 1 \ 0 \ 6]^T$ e $\mathbf{u}_3 = [0 \ 0 \ 1 \ 3]^T$.

A 4ª coluna de U forma uma base ortonormada de $\text{Ker}(A^T)$. Fazendo



```
>> U(:,4)'
ans =
    0.0000   -0.8847   -0.4423    0.1474
>> U(:,4)'/U(4,4)'
ans =
    0.0000   -6.0000   -3.0000    1.0000
```

confirmamos que a 4ª coluna de U é o versor de $\mathbf{u}_4 = [0 \ -6 \ -3 \ 1]^T$.

As primeiras $r = 3$ colunas da matriz V formam uma base ortonormada de $\text{lin}(A)$. Fazendo



```
>> rref(V(:,1:3)')
ans =
    1.0000         0    1.0000         0   -2.0000
         0    1.0000    1.0000         0    3.0000
         0         0         0    1.0000    4.0000
```

confirmamos que as primeiras 3 colunas de V são versores de $\mathbf{v}_1 = [1 \ 0 \ 1 \ 0 \ -2]^T$, $\mathbf{v}_2 = [0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 3]^T$ e $\mathbf{v}_3 = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 4]^T$. Finalmente, poderíamos verificar que as 4ª e 5ª colunas de V forma uma base ortonormada de $\text{Ker}(A)$.