

AULA 32

- Note bem: a leitura destes apontamentos não dispensa de modo algum a leitura atenta da bibliografia principal da cadeira
- Chama-se a atenção para a importância do trabalho pessoal a realizar pelo aluno resolvendo os problemas apresentados na bibliografia, sem consulta prévia das soluções propostas, análise comparativa entre as suas resposta e a respostas propostas, e posterior exposição junto do docente de todas as dúvidas associadas.

TÓPICOS

Exercícios.

32. Exercícios.

DECOMPOR UMA MATRIZ EM VALORES SINGULARES.

32.1. Dada a matriz rectangular, 3×2 ,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

temos

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^T \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

A matriz $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ tem polinómio característico

$$p(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 5 - \lambda & 1 \\ 1 & 5 - \lambda \end{bmatrix} = (5 - \lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 10\lambda + 24$$

cujas raízes são

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 96}}{2} = \frac{10 \pm 2}{2} = 6, 4$$

tem 2 valores próprios, $\lambda_1 = 6$ e $\lambda_2 = 4$, pelo que a matriz $\mathbf{A}$ tem valores singulares

$$\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1} = \sqrt{6}$$

e

$$\sigma_2 = \sqrt{\lambda_2} = 2$$

Podemos de imediato escrever a matriz diagonal dos valores singulares

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{6} & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

, e a matriz Σ , de dimensão $m \times n = 3 \times 2$,

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \mathbf{D} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{6} & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A matriz $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ tem vectores próprios normalizados:

1. Associado a $\lambda_1 = 6$

$$\begin{bmatrix} 5-6 & 1 \\ 1 & 5-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x = y \Rightarrow v'_1 = k \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

2. Associado a $\lambda_2 = 4$

$$\begin{bmatrix} 5-4 & 1 \\ 1 & 5-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x = -y \Rightarrow v'_2 = k \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow v_2 = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$\mathbf{V}$ é uma matriz ortogonal da dimensão de $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$, no caso presente, 2×2 , constituída por um conjunto ortonormado de vectores próprios da matriz $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$. No caso presente temos

$$\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2] = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$\mathbf{U}$ é uma matriz ortogonal $m \times m$, no caso presente 3×3 , cujos elementos são determinados por

$$\mathbf{u}_i = \frac{1}{\sigma_i} \mathbf{A} \mathbf{v}_i$$

Em que σ_i são os valores singulares não nulos de $\mathbf{A}$ e $\mathbf{v}_i$ os valores próprios normalizados a eles associados, pelo que temos de imediato

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sigma_1} \mathbf{A} \mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sigma_2} \mathbf{A} \mathbf{v}_2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

, sendo necessário determinar um vector unitário ortogonal a $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$, recorrendo à ortogonalização de Gram-Schmidt. Considerando a base $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{e}_3\}$, temos

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}'_3 &= \mathbf{e}_3 - \text{proj}_{\mathbf{u}_2} \mathbf{e}_3 - \text{proj}_{\mathbf{u}_1} \mathbf{e}_3 \\
&= \mathbf{e}_3 - \frac{\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{u}_2}{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2} \mathbf{u}_2 - \frac{\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1} \mathbf{u}_1 = \mathbf{e}_3 - (\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{u}_2) \mathbf{u}_2 - (\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{u}_1) \mathbf{u}_1 \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - 1/\sqrt{3} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1/3 \\ -1/3 \\ 1/3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -1/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

e

$$\mathbf{u}_3 = \frac{\mathbf{u}'_3}{\|\mathbf{u}'_3\|} = \begin{bmatrix} -\sqrt{2}/2\sqrt{3} \\ \sqrt{2}/2\sqrt{3} \\ \sqrt{2}/\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

Temos então

$$\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2 \quad \mathbf{u}_3] = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & -\sqrt{2}/2\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & \sqrt{2}/2\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & \sqrt{2}/\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

Ficando assim determinada a decomposição em valores singulares da matriz $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^T = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & -\sqrt{2}/2\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & \sqrt{2}/2\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & \sqrt{2}/\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{6} & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

, como podemos confirmar



```

>> x=sqrt(2); y=1/sqrt(3); z=1/sqrt(2);
>> U=[y -z -x*y/2;-y -z x*y/2;y 0 x*y];
>> S=[sqrt(6) 0; 0 2; 0 0];
>> V=[z -z; z z];
>> U*S*V'
ans =
    2.0000    0.0000
   -0.0000   -2.0000
    1.0000    1.0000

```

Podemos ainda decompor $\mathbf{A}$ na forma

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= \sum_{i=1}^r \sigma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T = \sigma_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{v}_1^T + \sigma_2 \mathbf{u}_2 \mathbf{v}_2^T \\ &= \sqrt{6} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

A decomposição em valores singulares da matriz $\mathbf{A}$ pode ser feita em MatLab utilizando a função `svd(A)`



```
>> A=[2 0; 0 -2; 1 1]
>> [U S V]=svd(A)
U =
    -0.5774    -0.7071   -0.4082
     0.5774    -0.7071    0.4082
    -0.5774     0.0000    0.8165
S =
    2.4495         0
         0     2.0000
         0         0
V =
    -0.7071   -0.7071
    -0.7071    0.7071
```

DADA A SVD DETERMINAR AS BASES DOS QUATRO ESPAÇOS FUNDAMENTAIS DA MATRIZ.

32.2. A matriz $\mathbf{A}$, $m \times n = 3 \times 2$, tem $r = 2$ valores singulares não nulos, e decomposição em valores singulares

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{U} \mathbf{\Sigma} \mathbf{V}^T = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & -\sqrt{2}/2\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & \sqrt{2}/2\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & \sqrt{2}/\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{6} & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Os vectores $\mathbf{u}_1 = [1/\sqrt{3} \quad -1/\sqrt{3} \quad 1/\sqrt{3}]^T$ e $\mathbf{u}_2 = [-1/\sqrt{2} \quad -1/\sqrt{2} \quad 0]^T$, correspondentes às primeiras $r = 2$ colunas da matriz $\mathbf{U}$ formam uma base ortonormada do espaço coluna de $\mathbf{A}$

Os vectores $\mathbf{v}_1 = [1/\sqrt{2} \quad 1/\sqrt{2}]^T$ e $\mathbf{v}_3 = [-1/\sqrt{2} \quad 1/\sqrt{2}]^T$, correspondentes às primeiras $r = 2$ colunas da matriz $\mathbf{V}$ formam uma base ortonormada do espaço linha de $\mathbf{A}$

Como $n - r = 0$, o núcleo da matriz $\mathbf{A}$ é constituído apenas pelo vector nulo, $\mathbf{0} = [0 \quad 0]^T$.

Sendo $m - r = 1$, a 3ª coluna da matriz $\mathbf{U}$, $\mathbf{u}_3 = [-\sqrt{2}/2\sqrt{3} \quad \sqrt{2}/2\sqrt{3} \quad \sqrt{2}/\sqrt{3}]^T$, forma uma base ortonormada do núcleo de $\mathbf{A}^T$.