

AULA 37

- Note bem: a leitura destes apontamentos não dispensa de modo algum a leitura atenta da bibliografia principal da cadeira
- Chama-se a atenção para a importância do trabalho pessoal a realizar pelo aluno resolvendo os problemas apresentados na bibliografia, sem consulta prévia das soluções propostas, análise comparativa entre as suas resposta e a respostas propostas, e posterior exposição junto do docente de todas as dúvidas associadas.

TÓPICOS

Melhor aproximação.

Projectção num subespaço.

Mínimo erro quadrático.

37. Erro quadrático em espaços de funções.

37.1. Melhor aproximação. Projectção num subespaço. Mínimo erro quadrático.

Seja \mathbb{E} um espaço vectorial, real ou complexo, em que está definido um produto interno, \mathbf{u} um vector de \mathbb{E} , \mathbb{W} um subespaço vectorial de \mathbb{E} e $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$ uma base ortogonal de \mathbb{W} . A **melhor aproximação** de \mathbf{u} em \mathbb{W} é o vector $\hat{\mathbf{u}}$ tal que a distância de \mathbf{u} a $\hat{\mathbf{u}}$ é menor do que a distância de \mathbf{u} a qualquer outro vector de \mathbb{W} ,

$$\|\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}\| \leq \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|, \forall \mathbf{v} \in \mathbb{W}$$

$\hat{\mathbf{u}}$ é a **projectção ortogonal do vector \mathbf{u} no subespaço \mathbb{W}** , ou seja,

$$\hat{\mathbf{u}} = \text{proj}_{\mathbb{W}} \mathbf{u} = \sum_{i=1}^n \text{proj}_{\mathbf{u}_i} \mathbf{u} = \sum_{i=1}^n \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_i}{\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_i} \mathbf{u}_i = \sum_{i=1}^n k_i \mathbf{u}_i$$

O vector $\mathbf{e} = \mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}$ designa-se por vector de erro, e pertence ao complemento ortogonal do subespaço \mathbb{W} , \mathbb{W}^\perp , sendo a sua norma, $\|\mathbf{e}\| = \|\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}\|$, designada por **mínimo erro quadrático**. Se a base do subespaço for ortonormada, dado que $\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_i = \|\mathbf{u}_i\|^2 = 1$, resulta que os coeficientes da projectção ortogonal são dados apenas por

$$k_i = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_i$$

Exemplo

1. A projectção ortogonal de $f(x) = e^x$ no subespaço vectorial, $\mathbb{W} = \mathcal{P}_1[-1, 1]$, com o produto interno

$$f \cdot g = \int_{-1}^1 f(x)g^*(x)dx$$

, tendo em atenção que $\mathcal{B} = \{1, x\}$ constitui uma base ortogonal de \mathbb{W} , é dada por

$$\begin{aligned}
\hat{f} &= \text{proj}_{\mathbb{W}} f \\
&= \frac{f \cdot p_1}{p_1 \cdot p_1} p_1 + \frac{f \cdot p_2}{p_2 \cdot p_2} p_2 = \frac{\int_{-1}^1 e^x dx}{\int_{-1}^1 dx} + \frac{\int_{-1}^1 e^x x dx}{\int_{-1}^1 x^2 dx} x \\
&= \frac{[e^x]_{-1}^1}{2} + \frac{[(-1+x)e^x]_{-1}^1}{\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^1} x = \frac{e - e^{-1}}{2} + \frac{2e^{-1}}{2/3} x \\
&= \frac{e - e^{-1}}{2} + 3e^{-1} x \\
&\approx 1.18 + 1.10x
\end{aligned}$$

A função $f(x) = e^x$ não pode ser representada exactamente por uma função polinomial do 1º grau. A função $\hat{f} \approx 1.18 + 1.10x$ corresponde, de todas as funções polinomiais do 1º grau, $\hat{f} = b + ax$, àquela cuja distância a $f(x) = e^x$ é menor do que a distância de qualquer outra função polinomial do 1º grau a $f(x) = e^x$.

Uma distância está associada a uma norma,

$$\text{dist}(f, \hat{f}) = \|f - \hat{f}\|$$

, e uma norma está associada a um produto interno,

$$\|f - \hat{f}\| = \sqrt{(f - \hat{f}) \cdot (f - \hat{f})^*}$$

Ao considerarmos o produto interno num domínio de continuidade $[a, b]$

$$f \cdot g = \int_a^b f(x)g^*(x)dx$$

, a minimização da distância entre f e \hat{f}

$$\begin{aligned}
\min \|f - \hat{f}\| &= \min \sqrt{(f - \hat{f}) \cdot (f - \hat{f})^*} \\
&= \min \sqrt{\int_a^b (f - \hat{f})(f - \hat{f})^* dx} \\
&= \min \sqrt{\int_a^b |(f - \hat{f})|^2 dx}
\end{aligned}$$

, corresponde à minimização da função

$$\int_a^b |e(x)|^2 dx$$

, com $e(x) = f(x) - \hat{f}(x)$, ou seja, corresponde à minimização do somatório do quadrado do erro cometido ponto a ponto para todos os valores de $x \in [a, b]$.

Adoptemos um outro ponto de vista. Sendo $f(x) = e^x$, e o modelo que consideramos ser adequado uma função polinomial do 1º grau, $\hat{f}(x) = b + ax$, a diferença ponto a ponto entre as duas funções, ou seja, o erro cometido, é

$$\begin{aligned} e(x) &= f(x) - \hat{f}(x) \\ &= e^x - (b + ax) \end{aligned}$$

, pelo que a minimização do erro quadrático no intervalo $[-1, 1]$, resulta

$$\begin{aligned} \min(E) &= \min \int_{-1}^1 (e^x - (b + ax))^2 dx \\ &= \min \left(2b^2 + (2e^{-1} - 2e)b + \frac{2}{3}a^2 - 4ae^{-1} + \frac{1}{2}(e^2 - e^{-2}) \right) \end{aligned}$$

Derivando a expressão em ordem aos parâmetros a e b e igualando a zero temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial a} &= -4e^{-1} + \frac{4}{3}a = 0 \Rightarrow a = 3e^{-1} \\ \frac{\partial E}{\partial b} &= 2e^{-1} + 4b - 2e = 0 \Rightarrow b = \frac{e - e^{-1}}{2} \end{aligned}$$

, ou seja, obtemos as soluções encontradas anteriormente através da projecção ortogonal.

Determinar a projecção ortogonal sobre um espaço de funções $\mathcal{F}[a, b]$ com produto interno $f \cdot g = \int_a^b f(x)g^*(x)dx$, corresponde a calcular a solução de mínimo erro quadrático.

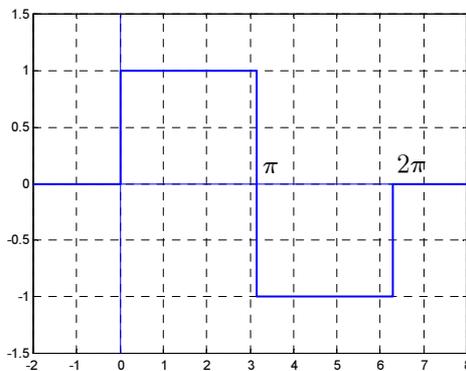


Figura 37.1

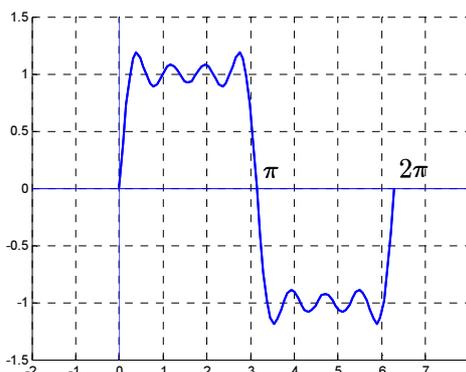


Figura 37.2

2. É possível demonstrar que os sinais $\sin(n\omega t)$ e $\sin(m\omega t)$, com n e m inteiros, e diferentes entre si, são ortogonais em qualquer intervalo $[t_1, t_1 + 2\pi/\omega]$. Assim sendo, e considerando $\omega = 1$ e $t_1 = 0$, o conjunto de sinais $\mathcal{S} = \{ \sin(kt) : k \in \mathbb{Z} \}$ constitui uma base ortogonal de sinais no intervalo $[0, 2\pi]$.

Considerando, por exemplo, o sinal $x(t)$ que se mostra na figura 37.1, e $n = 7$, podemos representar $x(t)$ no intervalo $[0, 2\pi]$ a menos de um sinal de erro, $x_e(t)$,

$$x(t) = \sum_{k=1}^7 a_k \sin(kt) + x_e(t)$$

A figura 37.2 mostra o sinal

$$\hat{x}(t) = \sum_{k=1}^7 a_k \sin(kt)$$

, correspondente à projecção ortogonal do sinal $x(t)$ no espaço gerado por \mathcal{S}

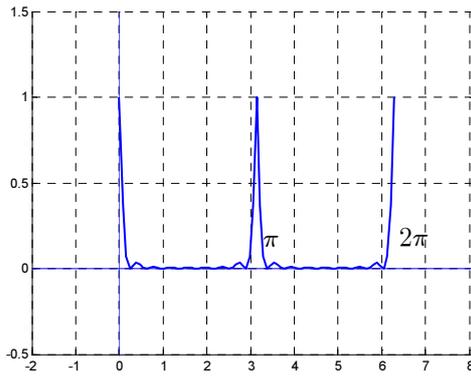


Figura 37.3

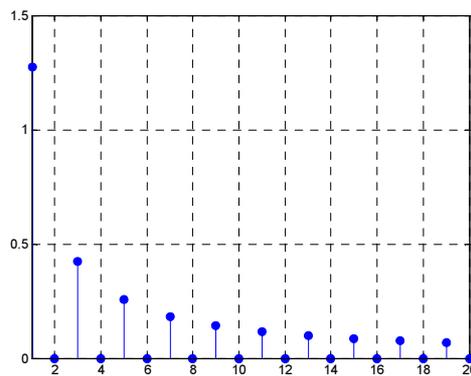


Figura 37.4

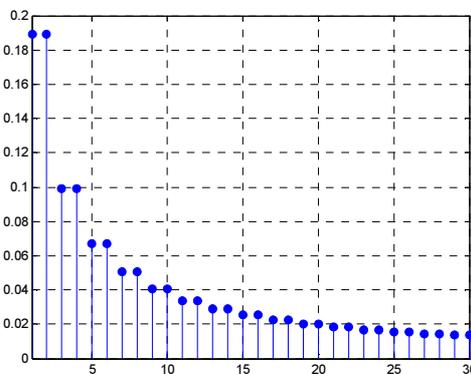


Figura 37.5

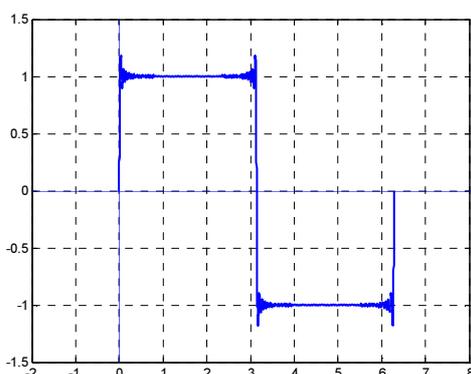


Figura 37.6

A figura 37.3 mostra o sinal $x_e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$, pertencente ao complemento ortogonal do espaço gerado por \mathcal{S} .

Note que na expressão dos coeficientes

$$a_k = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_k}{\mathbf{u}_k \cdot \mathbf{u}_k} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} x(t)y_k^*(t)dt}{\int_{t_1}^{t_2} y_k(t)y_k^*(t)dt}$$

o numerador corresponde ao produto interno entre o sinal a representar e os sinais que definem o espaço de representação, ditos sinais base, sendo portanto uma medida de semelhança do sinal com cada um dos sinais base. O denominador corresponde à energia de cada um dos sinais base no intervalo considerado, tendo apenas a função de normalizar os valores dos coeficientes. Se os sinais base tiverem norma unitária, ou seja, se forem versores do espaço que definem, o denominador tem valor 1, não influenciando o valor do coeficiente.

Para que a que a energia do sinal de erro no intervalo $[0, 2\pi]$, ou, o que é proporcional, o erro quadrático médio

$$C = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x_e^2(t)dt$$

seja o menor possível, os coeficientes a_k devem ser convenientemente calculados, sendo para este exemplo $a_k = \frac{2}{k\pi}(1 - \cos(k\pi))$.

A figura 37.4 mostra a evolução dos coeficientes para sucessivos valores de k , no caso para os primeiros 20 coeficientes.

A figura 37.5 mostra a evolução do erro quadrático médio à medida que se vão somando as sucessivas componentes de $\hat{x}(t)$.

A figura 37.6 mostra a aproximação $\hat{x}(t)$ conseguida se utilizássemos 100 coeficientes.

O erro quadrático médio da representação num intervalo $[t_1, t_2]$ de um sinal contínuo $x(t)$, num espaço de sinais $\{y_k(t)\}$, é dado por

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} [x(t) - \hat{x}(t)]^2 dt \\ &= \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \left[x(t) - \sum_{k=1}^n a_k y_k(t) \right]^2 dt \\ &= \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} x_e^2(t) dt \end{aligned}$$

Exercícios.

MÍNIMO ERRO QUADRÁTICO.

37.1. Calcular a projecção ortogonal de $f(x) = e^x$ no subespaço vectorial, $\mathbb{W} = \mathcal{P}_2[-1,1]$, das funções polinomiais do 2º grau no intervalo $[-1,1]$, com o produto interno

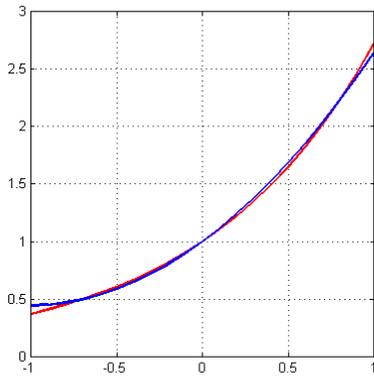


Figura 37.7

$$f \cdot g = \int_{-1}^1 f(x)g^*(x)dx$$

(ou seja, calcular os parâmetros do polinómio do 2º grau que, no intervalo $[-1,1]$, melhor se adapta à função $f(x) = e^x$ no sentido da minimização do erro quadrático).

Dado que $\mathcal{B} = \left\{1, x, x^2 - \frac{1}{3}\right\}$ constitui uma base ortogonal de \mathbb{W} , temos

$$\begin{aligned} \text{proj}_{\mathbb{W}} f &= \frac{f \cdot p_1}{p_1 \cdot p_1} p_1 + \frac{f \cdot p_2}{p_2 \cdot p_2} p_2 + \frac{f \cdot p_3}{p_3 \cdot p_3} p_3 \\ &= \frac{\int_{-1}^1 e^x dx}{\int_{-1}^1 dx} + \frac{\int_{-1}^1 e^x x dx}{\int_{-1}^1 x^2 dx} x + \frac{\int_{-1}^1 e^x (x^2 - \frac{1}{3}) dx}{\int_{-1}^1 (x^2 - \frac{1}{3})^2 dx} (x^2 - \frac{1}{3}) \\ &= \frac{[e^x]_{-1}^1}{2} + \frac{[(-1+x)e^x]_{-1}^1}{\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^1} x + \frac{\left[\frac{1}{3}e^x(5-6x+3x^2)\right]_{-1}^1}{\left[\frac{1}{9}x - \frac{2}{9}x^3 + \frac{1}{5}x^5\right]_{-1}^1} (x^2 - \frac{1}{3}) \\ &= \frac{e - e^{-1}}{2} + \frac{2e^{-1}}{2/3} x + \frac{13/3(2e - 14e^{-1})}{8/45} (x^2 - \frac{1}{3}) \\ &= \frac{3(11e^{-1} - e)}{4} + 3e^{-1}x + \frac{15(e - 7e^{-1})}{4} x^2 \\ &\approx 1.00 + 1.10x + 0.54x^2 \end{aligned}$$

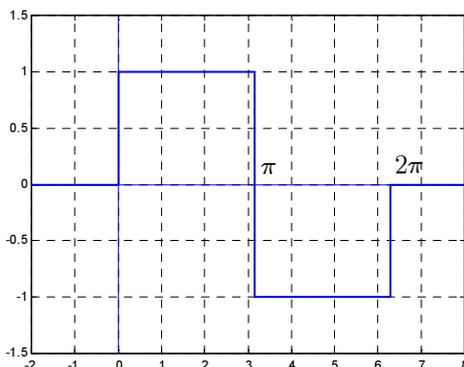


Figura 37.8

37.2. Consideremos o sinal

$$x(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < \pi \\ -1 & \pi \leq t < 2\pi \end{cases}$$

, conforme representado na figura 37.8.

Vamos calcular a projecção ortogonal do sinal $x(t)$ no espaço gerado pelo sinal $y(t) = \text{sen}(t)$ no intervalo $[0, 2\pi]$. Ou seja, vamos determinar a na relação $x(t) = ay(t) + x_e(t)$ de modo a minimizar o erro quadrático no intervalo $[0, 2\pi]$.

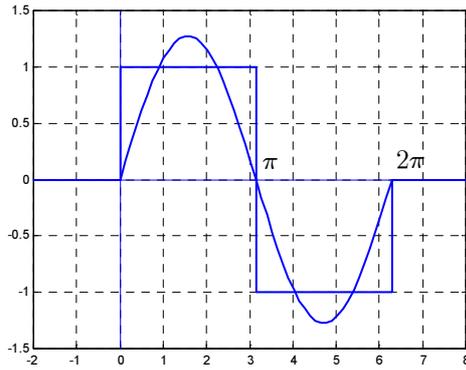


Figura 37.9

Temos então

$$\begin{aligned}
 a &= \frac{\int_0^{2\pi} x(t)y(t)dt}{\int_0^{2\pi} y^2(t)dt} \\
 &= \frac{\int_0^{2\pi} x(t)\text{sen}(t)dt}{\int_0^{2\pi} \text{sen}^2(t)dt} \\
 &= \frac{\int_0^{\pi} \text{sen}(t)dt - \int_{\pi}^{2\pi} \text{sen}(t)dt}{\pi} \\
 &= \frac{4}{\pi}
 \end{aligned}$$

pelo que

$$\hat{x}(t) = \frac{4}{\pi} \text{sen}(t)$$

no intervalo $[0, 2\pi]$. A figura 37.9 mostra o gráfico do sinal $x(t)$ e da aproximação $\hat{x}(t)$ no intervalo $[0, 2\pi]$.

Podemos traçar o gráfico da evolução do erro quadrático médio em função do coeficiente de semelhança a . Sendo o erro quadrático médio dado genericamente por

$$C = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} x_e^2(t)dt$$

Temos, para o exemplo em causa,

$$\begin{aligned}
 C &= \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} (x(t) - ay(t))^2 dt \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (x(t) - a\text{sen}(t))^2 dt \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^{2\pi} x^2(t)dt + a^2 \int_0^{2\pi} \text{sen}^2(t)dt - 2a \int_0^{2\pi} x(t)\text{sen}(t)dt \right] \\
 &= \frac{1}{2\pi} (2\pi + a^2\pi - 8a)
 \end{aligned}$$

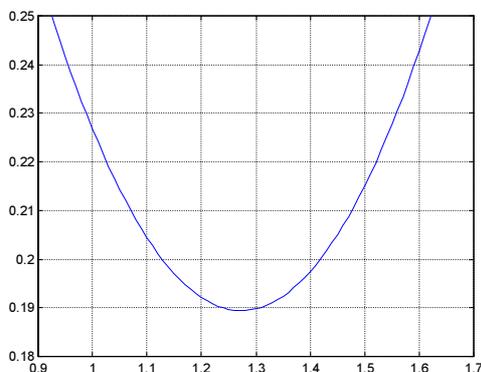


Figura 37.10

A figura 37.10 mostra a evolução do erro quadrático médio em função do coeficiente de semelhança. Observe que a curva tem um andamento quadrático com um mínimo bem definido correspondente ao coeficiente de semelhança. Podemos verificar o valor do mínimo do erro quadrático médio

$$\begin{aligned}
 \frac{dC}{da} &= \frac{d}{da} \left(\frac{1}{2\pi} (2\pi + a^2\pi - 8a) \right) \\
 &= \frac{1}{2\pi} (2a\pi - 8)
 \end{aligned}$$

$$\frac{dC}{da} = 0 \Rightarrow 2a\pi - 8 = 0 \Rightarrow a = \frac{4}{\pi}$$

37.3. Aproximar o sinal $x(t)$ dado no exemplo anterior pelo sinal

$$\hat{x}(t) = \sum_{k=1}^{k=7} a_k \text{sen}(kt)$$

, de modo a minimizar o erro quadrático médio no intervalo $[0, 2\pi]$.

Vamos calcular os coeficientes correspondentes à projecção ortogonal de $x(t)$ sobre cada um dos vectores da base do espaço de representação. Temos então

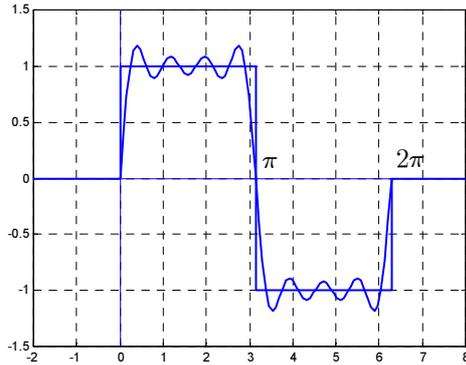


Figura 37.11

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{\int_{t_1}^{t_2} x(t)y_k^*(t)dt}{\int_{t_1}^{t_2} y_k y_k^*(t)dt} \\ &= \frac{\int_0^{2\pi} x(t) \text{sen}(kt)dt}{\int_0^{2\pi} \text{sen}^2(kt)dt} \\ &= \frac{\int_0^{\pi} \text{sen}(kt)dt - \int_{\pi}^{2\pi} \text{sen}(kt)dt}{\int_0^{2\pi} \text{sen}^2(kt)dt} \\ &= \frac{\frac{1}{k} \left[\cos(kt) \Big|_{\pi}^{2\pi} - \cos(kt) \Big|_0^{\pi} \right]}{\pi} \\ &= \frac{2}{k\pi} (1 - \cos(k\pi)) \end{aligned}$$

, ou seja,

$$a_k = \begin{cases} 0 & k \text{ par} \\ \frac{4}{k\pi} & k \text{ impar} \end{cases}$$

, logo,

$$\begin{aligned} \hat{x}(t) &= \sum_{k=1}^{k=7} a_k \text{sen}(kt) \\ &= \frac{4}{\pi} \left[\text{sen}(t) + \frac{1}{3} \text{sen}(3t) + \frac{1}{5} \text{sen}(5t) + \frac{1}{7} \text{sen}(7t) \right] \end{aligned}$$

A figura 37.11 mostra comparativamente o sinal $x(t)$ e a aproximação $\hat{x}(t)$ obtida.

37.4. Consideremos os sinais representados na figura 37.12. Podemos determinar o valor de a de modo a que os sinais $x_1[n]$ e $x_2[n]$ sejam ortogonais.

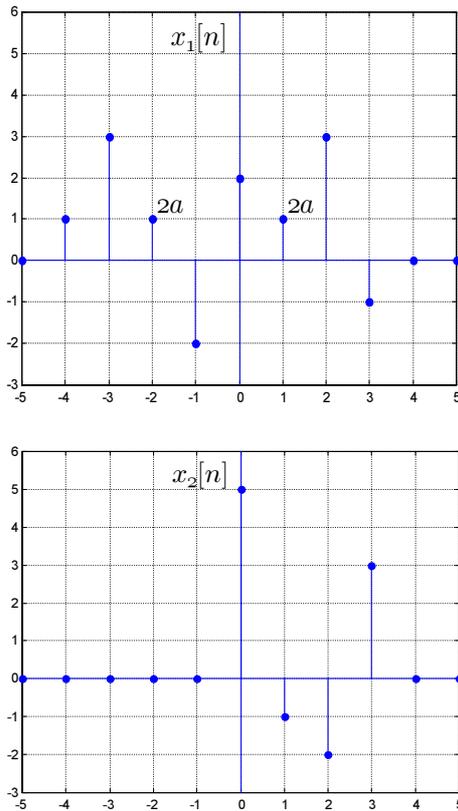


Figura 37.12

Para que os sinais $x_1[n]$ e $x_2[n]$ sejam ortogonais é necessário que o seu produto interno seja nulo. Por definição de produto interno entre sinais discretos, temos

$$\begin{aligned} x_1 \cdot x_2 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1[n]x_2[n] \\ &= \sum_{n=0}^3 x_1[n]x_2[n] \\ &= (2 \times 5) + (2a \times (-1)) + (3 \times (-2)) + (-1 \times 3) \\ &= 10 - 2a - 6 - 3 \\ &= 1 - 2a \end{aligned}$$

, logo, $x_1 \cdot x_2 = 0$ sse

$$\begin{aligned} 1 - 2a &= 0 \\ a &= 0.5 \end{aligned}$$

Considerando o valor determinado para a , podemos calcular a energia dos sinais $x_1[n]$, e $x_2[n]$.

A energia do sinal $x_1[n]$ é dada por

$$\begin{aligned} E_1 &= \sum_{-\infty}^{\infty} x_1^2[n] \\ &= \sum_{-4}^3 x_1^2[n] \\ &= 1 + 9 + 1 + 4 + 4 + 1 + 9 + 1 \\ &= 30 \end{aligned}$$

Para $x_2[n]$ temos

$$\begin{aligned} E_2 &= \sum_0^3 x_2^2[n] \\ &= 25 + 1 + 4 + 9 = 39 \end{aligned}$$

Consideremos o sinal $x[n]$ representado na figura 37.13. Podemos calcular a projecção ortogonal do sinal $x[n]$ no espaço dos sinais $x_1[n]$ e $x_2[n]$, ou seja, o sinal $\hat{x}[n]$ pertencente a esse espaço que mais se aproxima de $x[n]$ do ponto de vista da minimização do erro quadrático

$$\sum_{-\infty}^{\infty} x_e^2[n]$$

, ou seja ainda, tendo em atenção a definição de energia de um sinal, o sinal que minimiza a energia do sinal de erro

$$x_e[n] = x[n] - \hat{x}[n]$$

Vamos então determinar os valores dos coeficientes a_1 e a_2 da expressão $x[n] = a_1x_1[n] + a_2x_2[n] + x_e[n]$ de forma a

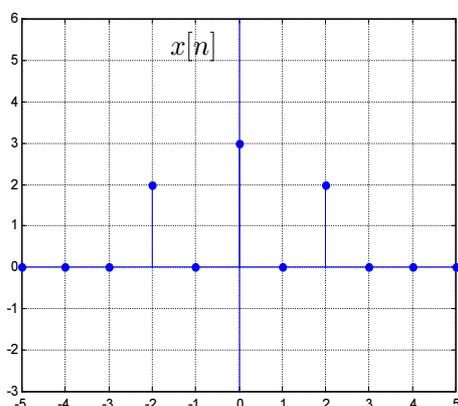


Figura 37.13

que a energia do sinal $x_e[n]$ seja mínima. Sendo os coeficientes a_i dados por

$$a_k = \frac{x \cdot x_k}{x_k \cdot x_k} = \frac{\sum_{-\infty}^{\infty} x[n]x_k[n]}{\sum_{-\infty}^{\infty} x_k^2[n]}$$

Temos

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\sum_{-2}^2 x[n]x_1[n]}{E_1} \\ &= \frac{1}{30}[(2 \times 1) + (3 \times 2) + (2 \times 3)] \\ &= \frac{14}{30} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{\sum_0^2 x[n]x_2[n]}{E_2} \\ &= \frac{1}{39}[(3 \times 5) + (2 \times (-2))] \\ &= \frac{11}{39} \end{aligned}$$