

FICHA DE TRABALHO 03

1. Escreva o vector $\mathbf{u} = [2 \ -1 \ 0]^T$ como combinação linear dos vectores $\mathbf{u}_1 = [1 \ -2 \ 1]^T$, $\mathbf{u}_2 = [0 \ 1 \ -1]^T$ e $\mathbf{u}_3 = [2 \ 1 \ 0]^T$.

2. Escreva o vector $\mathbf{u} = [6 \ 3 \ 3]^T$ como combinação linear dos vectores $\mathbf{u}_1 = [2 \ -2 \ 0]^T$, $\mathbf{u}_2 = [0 \ 1 \ -1]^T$ e $\mathbf{u}_3 = [-2 \ 1 \ 0]^T$.

3. Em \mathbb{R}^3 considere os vectores $\mathbf{u}_1 = [1 \ 1 \ 0]^T$, $\mathbf{u}_2 = [2 \ 0 \ 1]^T$ e $\mathbf{u}_3 = [0 \ 2 \ 2]^T$

a) Mostre que são linearmente independentes.

b) Justifique que geram \mathbb{R}^3 e escreva o vector $\mathbf{u} = [3 \ 3 \ 3]^T$ como combinação linear de \mathbf{u}_1 , \mathbf{u}_2 e \mathbf{u}_3 .

4. Diga quais dos seguintes conjuntos de vectores são linearmente independentes e quais geram \mathbb{R}^3 . Caso não gerem \mathbb{R}^3 , diga que subespaço vectorial geram, indique a dimensão respectiva, e faça uma interpretação geométrica do resultado:

a) $\mathcal{A} = \{[1 \ 1 \ 0]^T, [0 \ 0 \ 1]^T\}$

b) $\mathcal{B} = \{[2 \ 2 \ 2]^T, [0 \ 0 \ 1]^T, [0 \ 0 \ 0]^T\}$

c) $\mathcal{C} = \{[1 \ -2 \ 1]^T, [0 \ 1 \ -1]^T, [2 \ 1 \ 0]^T\}$

d) $\mathcal{D} = \{[1 \ 1 \ 0]^T, [2 \ 0 \ 1]^T, [2 \ 2 \ 0]^T\}$

e) $\mathcal{E} = \{[1 \ 2 \ 3]^T, [-2 \ -4 \ -6]^T, [-\sqrt{2} \ -2\sqrt{2} \ -3\sqrt{2}]^T\}$

5. Considere os vectores $\mathbf{u}_1 = [1 \ 1 \ 0 \ 3]^T$, $\mathbf{u}_2 = [1 \ -1 \ 0 \ 1]^T$ e $\mathbf{u}_3 = [0 \ 1 \ 1 \ 1]^T$. Diga quais dos seguintes vectores pertencem a $L(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$:

a) $[2 \ -3 \ 4 \ -1]^T$

b) $[1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$

c) $[0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$

d) $[-5 \ 10 \ 2 \ 0]^T$

6. Determine uma base do subespaço de \mathbb{R}^4

$$\mathbb{W} = \{ (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : (x + y = z) \wedge (x - y = w) \}$$

7. Determine uma base do subespaço de \mathbb{R}^4

$$\mathbb{W} = \{ (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : (x - y = z) \wedge (y - w = x) \}$$

8. Diga, justificando, se cada um dos seguintes subconjuntos de \mathbb{R}^3 é um seu subespaço vectorial. Em caso afirmativo, indique uma base e a dimensão respectiva, e faça uma interpretação geométrica.

a) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + z = 0\}$

b) $\{(a, 0, 0) \in \mathbb{R}^3 : a \in \mathbb{R}\}$

c) $\{(a, 1, 1) \in \mathbb{R}^3 : a \in \mathbb{R}\}$

d) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + z = 1\}$

e) $\{(a, b, c) : a, b, c \in \mathbb{Z}\}$

9. Em cada uma das alíneas seguintes, mostre que o conjunto \mathcal{B} indicado é linearmente independente e construa uma base de \mathbb{R}^3 que contenha os vectores de \mathcal{B} .

a) $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}^T \right\}$

b) $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T \right\}$

10. Em cada uma das alíneas seguintes, mostre que o conjunto \mathcal{B} indicado é linearmente independente e construa uma base de \mathbb{R}^4 que contenha os vectores de \mathcal{B} .

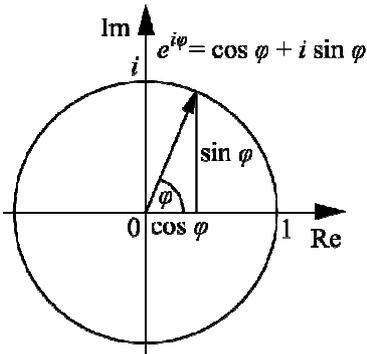
a) $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T \right\}$

b) $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \right\}$

11. Em \mathbb{R}^3 , considere a base $\mathcal{U} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$, com $\mathbf{u}_1 = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$, $\mathbf{u}_2 = \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3$ e $\mathbf{u}_3 = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3$ e a base $\mathcal{W} = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$, com $\mathbf{w}_1 = 2\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$, $\mathbf{w}_2 = -\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3$ e $\mathbf{w}_3 = 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3$. Sendo $\mathbf{v} = 2\mathbf{u}_1 - 4\mathbf{u}_2 + 5\mathbf{u}_3$ determine a representação de \mathbf{v} na base \mathcal{W} .

12. Em \mathbb{R}^3 , considere as bases $\mathcal{U} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$, com $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$, $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}^T$ e $\mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$ e $\mathcal{W} = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$, com $\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}^T$, $\mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}^T$ e $\mathbf{w}_3 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$. Represente o vector $\mathbf{v} = 2\mathbf{w}_1 - 2\mathbf{w}_2 + 2\mathbf{w}_3$ na base \mathcal{U} .

13. Em \mathbb{R}^3 , considere as bases $\mathcal{U} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$, com $\mathbf{u}_1 = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_3$, $\mathbf{u}_2 = 2\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3$ e $\mathbf{u}_3 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$ e $\mathcal{W} = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$, com $\mathbf{w}_1 = -\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$, $\mathbf{w}_2 = \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$ e $\mathbf{w}_3 = 2\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_3$. Sendo $\mathbf{v} = -5\mathbf{w}_1 + 4\mathbf{w}_2 - \mathbf{w}_3$ determine a representação de \mathbf{v} na base \mathcal{U} .



Nota: A função $f(x) = e^{jx}$, com $x \in \mathbb{R}$, é uma função complexa de variável real designada por **exponencial complexa** (contínua). A **fórmula de Euler** estabelece a relação entre a função exponencial complexa e as funções trigonométricas seno e co-seno

$$e^{jx} = \cos(x) + j\text{sen}(x)$$

Nas expressões acima e é a base do logaritmo natural ($e \approx 2.7183$), e assume-se que x é expresso em radianos e não em graus.

14. No espaço vectorial complexo \mathcal{F} , considere o conjunto de vectores $\mathcal{U} = \{1, e^{jx}, e^{-jx}\}$ e seja \mathbb{E} o subespaço de \mathcal{F} gerado por \mathcal{U} ($\mathbb{E} = L(1, e^{jx}, e^{-jx})$).

- Mostre que \mathcal{U} é linearmente independente e diga, justificando, qual é a dimensão de \mathbb{E} , indicando uma sua base.
- Verifique que o vector $\cos(x) + 2j\text{sen}(x)$ pertence a \mathbb{E} , e determine as suas coordenadas relativamente à base exibida em a).

15. No espaço vectorial complexo \mathcal{F} , considere os vectores $\mathbf{u}_1 = \cos^2(x)$, $\mathbf{u}_2 = \text{sen}^2(x)$, $\mathbf{u}_3 = \text{sen}(2x)$ e $\mathbf{u}_4 = \cos(2x)$.

- Prove que o conjunto $\mathcal{U} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\}$ é linearmente dependente.
- Determine uma base e a dimensão do subespaço de \mathcal{F} gerado por \mathcal{U} , $L(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4)$.