

# FICHA DE TRABALHO 04

---

1. Em  $\mathbb{R}^2$  considere a base canónica  $\mathcal{E} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ .

a) Dados os vectores  $\mathbf{u} = 3\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2$  e  $\mathbf{v} = 2\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2$ , e sendo  $\alpha$  o ângulo entre eles, calcule o vector

$$\mathbf{w} = \frac{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{u} - \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|} \cos(\alpha) - \text{proj}_{\mathbf{v}} \mathbf{u}.$$

b) Dados os vectores  $\mathbf{u} = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$  e  $\mathbf{v} = 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$ , calcule o vector

$$\mathbf{w} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} - \|\mathbf{v}\| \text{proj}_{\mathbf{v}} \mathbf{u}.$$

2. Em  $\mathbb{R}^4$ , determine os valores de  $k$  para os quais  $\|k\mathbf{u}\| = 14$ , com  $\mathbf{u} = [6 \ 0 \ -3 \ -2]^T$ .

3. Em  $\mathbb{R}^3$ , calcule os valores de  $k$  para os quais os vectores  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  são ortogonais:

a)  $\mathbf{u} = [3 \ -1 \ -2]^T$  e  $\mathbf{v} = [k \ 7 \ 1]^T$ .

b)  $\mathbf{u} = [k \ 1 \ k]^T$  e  $\mathbf{v} = [k \ 6 \ -5]^T$ .

4. Seja  $\mathcal{E} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  a base canónica de  $\mathbb{R}^3$ . Dados os vectores  $\mathbf{u} = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$  e  $\mathbf{v} = -\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3$

a) Calcule a projecção ortogonal de  $\mathbf{u}$  sobre  $\mathbf{v}$  e a componente de  $\mathbf{u}$  ortogonal a  $\mathbf{v}$ .

b) Calcule o produto externo entre os vectores  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ .

c) Se  $\mathbb{W} = L(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ , indique, justificando, uma base ortonormada para  $\mathbb{W}^\perp$ .

5. Em  $\mathbb{R}^4$ ,

a) Dados os vectores  $\mathbf{u} = [1 \ -2 \ -3 \ 4]^T$  e  $\mathbf{v} = [3 \ 2 \ 0 \ 1]^T$ , e sendo  $\alpha$  o ângulo entre eles, calcule o vector  $\mathbf{w} = \frac{\|\mathbf{v}\|(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})}{\|\mathbf{u}\|\cos(\alpha)} \text{proj}_{\mathbf{v}} \mathbf{u}$ .

b) Verifique quais dos seguintes vectores são ortogonais:  $\mathbf{u}_1 = [1 \ 1 \ 0 \ 0]^T$ ,  $\mathbf{u}_2 = [0 \ 2 \ 0 \ 1]^T$ ,  $\mathbf{u}_3 = [0 \ 0 \ 2 \ 3]^T$  e  $\mathbf{u}_4 = [2 \ 0 \ 1 \ 0]^T$ .

6. Em  $\mathbb{R}^3$ , calcule o produto externo dos vectores  $\mathbf{u}_1 = [1 \ 1 \ 0]^T$  e  $\mathbf{u}_2 = [1 \ -1 \ 0]^T$ . Esboce graficamente  $\mathbf{u}_1$  e  $\mathbf{u}_2$  e  $\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2$ .

**7.** Dada a matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

- Determine uma base para o espaço linha da matriz.
- Determine uma base para o espaço coluna da matriz.
- Determine uma base para o núcleo da matriz.
- Determine uma base para o espaço nulo à esquerda da matriz.

**8.** Determine uma base para o espaço coluna da matriz.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

**9.** Sendo  $\mathbb{W}$  o subespaço de  $\mathbb{R}^3$  gerado pelos vectores  $\mathbf{u}_1 = [1 \ -2 \ 1]^T$  e  $\mathbf{u}_2 = [0 \ 1 \ -1]^T$ , determine uma base para  $\mathbb{W}^\perp$ .

**10.** Sendo  $\mathbb{W}$  o subespaço de  $\mathbb{R}^3$  gerado pelo vector  $\mathbf{u}_1 = [1 \ -1 \ 0]^T$ , determine uma base para  $\mathbb{W}^\perp$ .

**11.** Sendo  $\mathbb{W}$  o subespaço de  $\mathbb{R}^3$  gerado pelo vector  $\mathbf{u}_1 = [0 \ 1 \ -2]^T$ , determine uma base ortonormada para  $\mathbb{W}^\perp$ , e uma base ortonormada de  $\mathbb{R}^3$  só formada por vectores de  $\mathbb{W}$  ou  $\mathbb{W}^\perp$ .

**12.** Sendo  $\mathbb{W}$  o subespaço de  $\mathbb{R}^3$  gerado pelos vectores  $\mathbf{u}_1 = [1 \ 0 \ 1]^T$  e  $\mathbf{u}_2 = [0 \ 1 \ -1]^T$ , determine uma base ortonormada para  $\mathbb{W}^\perp$ , e uma base ortonormada de  $\mathbb{R}^3$  só formada por vectores de  $\mathbb{W}$  ou  $\mathbb{W}^\perp$ .

**13.** Determine uma base ortonormada do subespaço de  $\mathbb{R}^3$

$$\mathbb{W} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = z\}$$

**14.** Em  $\mathbb{R}^4$ , seja  $\mathbb{W}$  o subespaço gerado pelos vectores (linearmente independentes)  $\mathbf{u}_1 = [-1 \ 0 \ 1 \ 1]^T$ ,  $\mathbf{u}_2 = [0 \ -2 \ 0 \ 1]^T$  e  $\mathbf{u}_3 = [1 \ 0 \ -1 \ 2]^T$ . Use o método de Gram-Schmidt para obter uma base ortonormada de  $\mathbb{W}$  a partir da base dada.

**15.** Verifique se é ortogonal a matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 5 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$