

FICHA DE TRABALHO 05

1. Determine, na forma algébrica e na forma polar, o complexo

$$w = \frac{z - j^{20}}{z^4 - 1} (z^2 - j^{18})$$

2. Sendo $\mathbf{A}^* = \begin{bmatrix} -2j & 1-j \\ -j & -1 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{B}^* = [5 \quad -5j]$, determine a matriz \mathbf{X} tal que $\mathbf{A}\mathbf{X} = \overline{\mathbf{B}}$.

3. Considere as matrizes complexas

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1-j \\ 1+j & -2 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1+j \\ -1+j & j \end{bmatrix}$$

a) Verifique se são hermitianas ou anti-hermitianas.

b) Calcule $\mathbf{A}^* + j^{21}\mathbf{B}$.

4. Considere o espaço complexo $\mathcal{C}([-\pi, \pi])$ com o produto interno definido por

$$f \cdot g = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g^*(t)dt$$

a) Verifique que $x_1(t) = \cos(t)$ e $x_2(t) = \sin(t)$ são ortogonais

b) Determine a norma de $x_k(t) = e^{jkt}$, com k inteiro

5. No espaço complexo $\mathcal{C}([0, 1])$ com o produto interno definido por

$$f \cdot g = \int_0^1 f(x)g^*(x)dx, \text{ considere o subespaço } \mathbb{W} \text{ gerado por } g(x) = x - x^2, \\ \mathbb{W} = L(x - x^2). \text{ Calcule a projecção ortogonal de } f(x) = \sin(\pi x) \text{ em } \mathbb{W}.$$

6. No espaço complexo $\mathcal{C}([0, 1])$ com o produto interno definido por

$$f \cdot g = \int_0^1 f(x)g^*(x)dx, \text{ considere o subespaço } \mathbb{F} \text{ gerado pelos vectores } \mathbf{u}_1 = x, \\ \mathbf{u}_2 = 2 - x^2, \text{ e } \mathbf{u}_3 = x^3.$$

a) Usando o método de ortogonalização de Gram-Schmidt determine uma base ortogonal de \mathbb{F} , $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$.

b) Recorrendo à base ortogonal \mathcal{B} , calculada na alínea anterior, calcule a projecção ortogonal de $f(x) = e^x$ no subespaço \mathbb{F} .

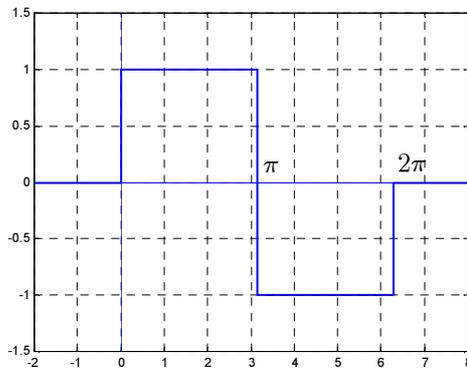
7. Em $\mathcal{C}([0, \pi])$ com o produto interno definido por $f \cdot g = \int_0^{\pi} f(x)g^*(x)dx$,

considere o subespaço \mathbb{G} gerado por gerado pelos vectores $\mathbf{u}_1 = 1$, $\mathbf{u}_2 = 1 - e^{-j2x}$, e $\mathbf{u}_3 = 1 + e^{j2x}$

a) Determine, pelo método de Gram-Schmidt, uma base ortogonal para \mathbb{G} , $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$.

b) Recorrendo à base ortogonal \mathcal{B} , calculada na alínea anterior, calcule a projecção ortogonal de $f(x) = \cos(2x)$ no subespaço \mathbb{G} .

8. No espaço complexo $\mathcal{C}([0, 2\pi])$ com o produto interno definido por



$f \cdot g = \int_0^{2\pi} f(x)g^*(x)dx$, calcule a projecção ortogonal, $\hat{f}(x)$, de

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < \pi \\ -1 & \pi \leq x < 2\pi \end{cases}$$

, representado na figura, no subespaço \mathbb{W} gerado pelos vectores, $\mathbf{v}_1 = e^{-j2x}$, $\mathbf{v}_2 = e^{-jx}$, $\mathbf{v}_3 = 1$, $\mathbf{v}_4 = e^{jx}$ e $\mathbf{v}_5 = e^{j2x}$.

9. Represente graficamente, para $n \in [-5, 10]$, os sinais discretos

$$x_1[n] = \sum_{i=0}^7 \text{sen} \left[i \frac{\pi}{2} \right] \delta[n - i]$$

e

$$x_2[n] = \sum_{i=0}^7 \text{cos} \left[i \frac{\pi}{2} \right] \delta[n - i].$$

Mostre que os sinais são ortogonais em l^2 com produto interno definido por $x_1 \cdot x_2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1[n]x_2^*[n]$.

10. Represente graficamente, para $n \in [-5, 5]$, os sinais discretos

$$x_1[n] = (3 - |n|) \sum_{k=-3}^3 \delta[n - k]$$

e

$$x_2[n] = n^3 \sum_{k=-4}^4 \delta[n - k].$$

Verifique se os sinais são ortogonais em l^2 com produto interno definido por $x_1 \cdot x_2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1[n]x_2^*[n]$.