

FICHA DE TRABALHO 06

1. Seja

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

a matriz canónica da transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$.

- Determine $T(1,1,1)$ e $T(x,y,z) \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.
- Verifique se T é invertível.

2. Seja

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

a matriz canónica da transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Verifique se os vectores $\mathbf{w}_1 = [0 \ 0 \ -2]^T$, $\mathbf{w}_2 = [-5 \ 0 \ 5]^T$, $\mathbf{w}_3 = [0 \ 0 \ 0]^T$ e $\mathbf{w}_4 = [1 \ 2 \ 3]^T$ pertencem à imagem de T .

3. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, que consiste numa rotação de $\theta = \pi/2$ no sentido directo, seguida de uma reflexão sobre o eixo do \mathbf{xx} , seguida de uma projecção ortogonal sobre o eixo dos \mathbf{yy} . Determine $T(1,3)$ e $T(x,y) \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

4. Dada a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, que consiste numa rotação de $\theta = 3\pi/2$ no sentido directo, seguida de uma reflexão sobre o eixo do \mathbf{xx} , seguida de uma projecção ortogonal sobre o eixo dos \mathbf{yy} , determine $T\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}^T\right)$.

5. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T = T_3 \circ T_2 \circ T_1$, onde T_1 é uma rotação de $\theta = -\pi/2$, T_2 é uma reflexão sobre o eixo dos \mathbf{yy} e T_3 é uma projecção ortogonal sobre o eixo dos \mathbf{xx} . Determine $T\left(\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}^T\right)$, $\forall \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^2$.

6. Considere a seguinte matriz dos vértices de um quadrado em \mathbb{R}^2

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Determine a imagem final (os vértices) do quadrado quando é rodado de $\theta = \pi/2$, e depois reflectido sobre o eixo do \mathbf{yy} .

7. Sejam $T_1 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma reflexão relativamente ao plano \mathbf{xy} , $T_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma rotação de $\theta = -\pi/2$ relativamente ao eixo dos \mathbf{zz} , $T_3 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma reflexão

relativamente ao plano yz e $T = T_3 \circ T_2 \circ T_1$. Determine $T(x, y, z) \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ e verifique se T é uma isometria. Calcule $T^{-1}(x, y, z)$.

8. Determine a matriz da transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que consiste numa contração de um factor $k = 0.25$, de uma rotação de $\theta = \pi/2$ sobre o eixo dos xx , de uma reflexão sobre o plano xy , e de uma expansão de um factor $k = 4$, e verifique se é uma isometria.

9. Determine a matriz 3×3 que corresponde à composição dum redimensionamento duma dada figura com um factor 0.4 , seguida duma rotação de $\theta = \pi/2$ sobre o eixo do xx .

10. Seja $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ a aplicação linear tal que $f(1, 0, 0) = (1, 2, -1)$, $f(0, 1, 0) = (2, 0, -2)$ e $f(0, 0, 1) = (-1, 2, 1)$. Escreva a matriz canónica de f .

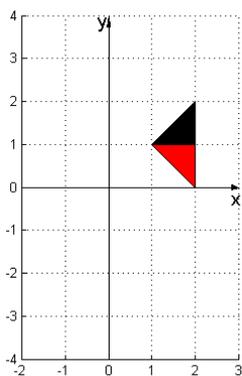
11. Determine a matriz canónica de cada uma das seguintes funções lineares:

a) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4, f(x, y, z) = (x - y + z, 0, y - z, x + y)$

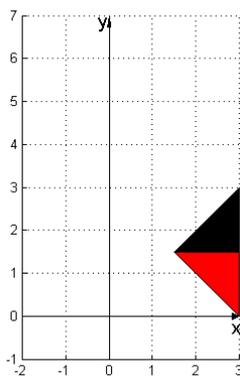
b) $g : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4,$

$$g(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2 - x_4, 2x_2 - 2x_3, x_1 - x_2 - 2x_4)$$

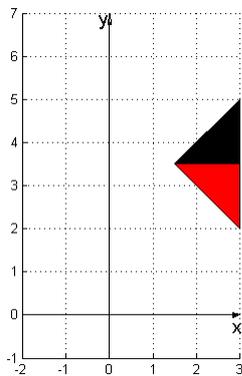
c) $h : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2, h(x, y, z, w) = (x + y, z + w)$



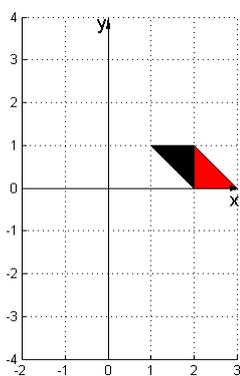
a)



b)



c)



d)

12. Diga quais das imagens, de b) a d), são compatíveis com uma transformação linear do objecto da figura a) e determine a matriz canónica das transformações lineares correspondentes.

13. Sejam $T_1 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma reflexão relativamente ao plano yz , $T_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma rotação no sentido directo com $\theta = \pi/2$ relativamente ao eixo dos zz , e $T_3 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma reflexão relativamente ao plano xy . Determine a matriz canónica de $(T_3 \circ T_2 \circ T_1)^{-1}$ e use-a para calcular $(T_3 \circ T_2 \circ T_1)^{-1}(x, y, z)$.

14. Considere o vector coluna de \mathbb{R}^4 $x[n] = \cos\left[n \frac{\pi}{2}\right] \sum_{i=0}^3 \delta[n-i]$, com $n \in \mathbb{Z}$. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{C}^4$ com matriz associada $M = [u_0[k] \ u_1[k] \ u_2[k] \ u_3[k]]$, em que $u_n[k]$ são os vectores coluna $u_n[k] = e^{jk \frac{\pi}{2} n} \sum_{i=0}^3 \delta[k-i]$, com $k \in \mathbb{Z}$.

a) Represente graficamente $x[n]$.

b) Calcule a matriz complexa M .

c) Calcule o vector coluna de \mathbb{R}^4 , $X[k]$, correspondente à imagem de $x[n]$ resultante da transformação T , $X[k] = Mx[n]$.