

FICHA DE TRABALHO 07

1. Para cada uma das seguintes matrizes, determine os valores próprios, os subespaços próprios e as multiplicidades algébrica e geométrica de cada valor próprio:

$$\text{a) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{b) } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{c) } \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{d) } \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Considere as matrizes do exercício 1. Diga se são ou não diagonalizáveis e, em caso afirmativo, determine uma sua matriz diagonalizadora e a correspondente matriz diagonal a que é semelhante.

3. Entre as matrizes reais seguintes, determine as que são diagonalizáveis. Caso o sejam, encontre uma matriz diagonalizadora \mathbf{P} e a correspondente matriz diagonal \mathbf{D} tais que $\mathbf{A} = \mathbf{PDP}^{-1}$:

$$\text{a) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 6 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{b) } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{c) } \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{d) } \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{e) } \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

4. Em cada uma das alíneas que se seguem, determine uma matriz \mathbf{Q} ortogonal que diagonaliza \mathbf{A} e calcule $\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q}$:

$$\text{a) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{b) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & 7 \end{bmatrix}$$
$$\text{c) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{d) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

5. Dada a matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Determine:

a) Uma matriz ortogonal \mathbf{Q} que diagonaliza \mathbf{A} .

- b) A decomposição espectral da matriz.
- c) A projecção do vector $\mathbf{u} = [1 \ 2 \ 3]^T$ sobre o subespaço próprio do maior valor próprio de \mathbf{A} .

6. Dada a matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Determine:

- a) Uma matriz ortogonal \mathbf{Q} que diagonaliza \mathbf{A} .
- b) A projecção do vector $\mathbf{u} = [0 \ 0 \ 2]^T$ sobre o subespaço próprio do maior valor próprio de \mathbf{A} .

7. Determine a matriz de projecção ortogonal sobre o subespaço próprio do maior valor próprio da matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

8. Considere a matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Determine a projecção de $\mathbf{u} = [1 \ 2 \ 3]^T$ sobre o subespaço próprio do menor valor próprio de \mathbf{A} .

9. Determine a matriz simétrica \mathbf{A} que tem valores próprios $\lambda_1 = 5$ e $\lambda_2 = 1$ e tal que $\mathbf{v}_1 = [-2 \ 2]^T$ é o vector próprio de \mathbf{A} associado a λ_1 e $\mathbf{v}_2 = [1 \ 1]^T$ é o vector próprio de \mathbf{A} associado a λ_2 .

10. Determine a matriz simétrica \mathbf{A} que tem valores próprios $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 1$, e $\lambda_3 = 0$, com vectores próprios associados $\mathbf{v}_1 = [1 \ 0 \ 0]^T$, $\mathbf{v}_2 = [1 \ 1 \ 0]^T$ e $\mathbf{v}_3 = [0 \ 1 \ 1]^T$, respectivamente.

11. Determine a matriz simétrica \mathbf{A} que tem valores próprios $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$, e tal que

$$\mathbb{E}_{-1} = \{(x, y, z) : y + z = 0\}$$

$$\mathbb{E}_1 = \{(x, y, z) : x = 0 \wedge y - z = 0\}$$

12. Dada a matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Decomponha \mathbf{A} em valores singulares.