

Ficha de Trabalho 04 e 05

Espaços Vectoriais. (Aulas 9 a 13).

Vectores em $\mathbb{R}^n$. Vectores livres. Vectores em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$. Vectores em $\mathbb{R}^n$. Vectores iguais. Soma de vectores. Produto de um escalar por um vector. Notação matricial. Vector nulo. Vector simétrico. Propriedades da soma e do produto por um escalar.

Espaços Vectoriais. Estruturas algébricas. Espaço vectorial. Combinação linear. Independência linear.

Subespaço, Base e Dimensão. Subespaço. Subespaço gerado. Base e dimensão. Mudança de base.

A saber:

1. Verificar se um conjunto de vectores é linearmente independente/dependente.
2. Verificar se um vector é, ou não, uma combinação linear de um conjunto de vectores dado
3. Conhecido um conjunto de vectores, determinar o espaço por eles gerado.
4. Determinar se um conjunto de vectores é uma base de um espaço vectorial determinado por um conjunto de condições.
5. Determinar uma base de um subespaço definido por um conjunto de condições.
6. Escrever um mesmo vector em diversas bases de um subespaço (fazer uma mudança de base).

1. a) Escreva o vector $\mathbf{u} = [2 \ -1 \ 0]^T$ como combinação linear dos vectores $\mathbf{u}_1 = [1 \ -2 \ 1]^T$, $\mathbf{u}_2 = [0 \ 1 \ -1]^T$ e $\mathbf{u}_3 = [2 \ 1 \ 0]^T$.

b) Escreva o vector $\mathbf{u} = [6 \ 3 \ 3]^T$ como combinação linear dos vectores $\mathbf{u}_1 = [2 \ -2 \ 0]^T$, $\mathbf{u}_2 = [0 \ 1 \ -1]^T$ e $\mathbf{u}_3 = [-2 \ 1 \ 0]^T$.

2. Em $\mathbb{R}^3$ considere os vectores $\mathbf{u}_1 = [1 \ 1 \ 0]^T$, $\mathbf{u}_2 = [2 \ 0 \ 1]^T$ e $\mathbf{u}_3 = [0 \ 2 \ 2]^T$

a) Mostre que são linearmente independentes.

b) Justifique que geram $\mathbb{R}^3$ e escreva o vector $\mathbf{u} = [3 \ 3 \ 3]^T$ como combinação linear de $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ e $\mathbf{u}_3$.

3. Diga quais dos seguintes conjuntos de vectores são linearmente independentes e quais geram $\mathbb{R}^3$. Caso não gerem $\mathbb{R}^3$, diga que subespaço vectorial geram, indique a dimensão respectiva, e faça uma interpretação geométrica do resultado:

a) $\mathcal{A} = \{[1 \ 1 \ 0]^T, [0 \ 0 \ 1]^T\}$

b) $\mathcal{B} = \{[2 \ 2 \ 2]^T, [0 \ 0 \ 1]^T, [0 \ 0 \ 0]^T\}$

c) $\mathcal{C} = \{[1 \ -2 \ 1]^T, [0 \ 1 \ -1]^T, [2 \ 1 \ 0]^T\}$

d) $\mathcal{D} = \{[1 \ 1 \ 0]^T, [2 \ 0 \ 1]^T, [2 \ 2 \ 0]^T\}$

$$e) \mathcal{E} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} -2 & -4 & -6 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & -2\sqrt{2} & -3\sqrt{2} \end{bmatrix}^T \right\}$$

4. Considere os vectores $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}^T$, $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$ e $\mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$. Diga quais dos seguintes vectores pertencem a $L(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$:

a) $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 & -1 \end{bmatrix}^T$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$

c) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$

d) $\begin{bmatrix} -5 & 10 & 2 & 0 \end{bmatrix}^T$

5. a) Em cada uma das alíneas seguintes, mostre que o conjunto $\mathcal{B}$ indicado é linearmente independente e construa uma base de $\mathbb{R}^3$ que contenha os vectores de $\mathcal{B}$.

i) $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}^T \right\}$

ii) $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T \right\}$

b) Em cada uma das alíneas seguintes, mostre que o conjunto $\mathcal{B}$ indicado é linearmente independente e construa uma base de $\mathbb{R}^4$ que contenha os vectores de $\mathcal{B}$.

i) $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T \right\}$

ii) $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \right\}$

6. Em $\mathbb{R}^3$, considere os vectores $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$, $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ e $\mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 3 \end{bmatrix}^T$

a) Seja $\mathbb{G}$ o subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado por $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ e $\mathbf{u}_3$, $\mathbb{G} = L(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$. Determine uma sua base e a dimensão respectiva.

b) Caracterize os vectores de $\mathbb{G}$ por meio de uma condição nas suas coordenadas.

c) Construa uma base de $\mathbb{R}^3$ que contenha a base de $\mathbb{G}$ que indicou em a).

7. Considere o conjunto de vectores de $\mathbb{R}^4$

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T \right\}$$

a) Será $\mathcal{B}$ linearmente independente? Porquê?

b) Determine uma base e a dimensão do subespaço $\mathbb{W} \subset \mathbb{R}^4$ gerado por $\mathcal{B}$.

c) Diga, justificando, se o vector $\begin{bmatrix} 2 & -2 & -2 & 0 \end{bmatrix}^T$ pertence a $\mathbb{W}$.

d) Caracterize os vectores $(x, y, z, w) \in \mathbb{W}$ por meio de uma condição nas suas coordenadas.

8. Considere o conjunto de vectores de $\mathbb{R}^4$

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}^T \right\}$$

- a) Será $\mathcal{B}$ linearmente independente? Porquê?
- b) Determine uma base e a dimensão do subespaço $\mathbb{W} \subset \mathbb{R}^4$ gerado por $\mathcal{B}$.
- c) Diga, justificando, se o vector $[-1 \ -1 \ 0 \ 5]^T$ pertence a $\mathbb{W}$.
- d) Caracterize os vectores $(x, y, z, w) \in \mathbb{W}$ por meio de uma condição nas suas coordenadas.

9. Considere o conjunto de vectores de $\mathbb{R}^3$

$$\mathcal{B} = \{[1 \ 1 \ 0]^T, [1 \ 2 \ 1]^T, [1 \ 0 \ -1]^T\}$$

- a) Porque razão não $\mathcal{B}$ pode ser uma base de $\mathbb{R}^3$.
- b) Determine uma base a dimensão do subespaço $\mathbb{W} \subset \mathbb{R}^3$ gerado por $\mathcal{B}$.
- c) Prove que o vector $[2 \ 5 \ 3]^T$ pertence a $\mathbb{W}$ e determine as suas coordenadas na base indicada na alínea anterior.
- d) Caracterize os vectores $(x, y, z) \in \mathbb{W}$ por meio de uma condição nas suas coordenadas.

10. Considere, no espaço vectorial real $\mathbb{R}^4$, o conjunto de vectores

$$\mathcal{B} = \{[1 \ 1 \ 0 \ 0]^T, [1 \ 0 \ -1 \ 0]^T, [1 \ 2 \ 3 \ -2]^T, [0 \ 0 \ 1 \ -1]^T\}$$

- a) Mostre que $\mathcal{B}$ não é uma base de $\mathbb{R}^4$. Obtenha uma base de $\mathbb{R}^4$ contendo o maior número possível de vectores de $\mathcal{B}$.
- b) Determine uma base e a dimensão do subespaço $\mathbb{W} \subset \mathbb{R}^4$ gerado por $\mathcal{B}$ e caracterize os vectores $(x, y, z, w) \in \mathbb{W}$ por meio de uma condição nas suas coordenadas.

11. Determine uma base do subespaço de $\mathbb{R}^4$

- a) $\mathbb{W} = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : (x + y = z) \wedge (x - y = w)\}$
- b) $\mathbb{W} = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : (x - y = z) \wedge (y - w = x)\}$

12. Diga, justificando, se cada um dos seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ é um seu subespaço vectorial. Em caso afirmativo, indique uma base e a dimensão respectiva, e faça uma interpretação geométrica.

- a) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + z = 0\}$
- b) $\{(a, 0, 0) \in \mathbb{R}^3 : a \in \mathbb{R}\}$
- c) $\{(a, 1, 1) \in \mathbb{R}^3 : a \in \mathbb{R}\}$
- d) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + z = 1\}$
- e) $\{(a, b, c) : a, b, c \in \mathbb{Z}\}$
- f) $\{(2a + b, 2b - 2c, 3a + c) : a, b, c \in \mathbb{R}\}$

g) $\{(a - c, 2b + 2c, a + b) : a, b, c \in \mathbb{R}\}$

h) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x + y + 1\}$

i) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = y^2\}$

j) $\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}^T \right\}$

13. Para cada um dos conjuntos seguintes, averigue se são subespaços dos espaços vectoriais reais indicados. Em caso afirmativo, indique uma base e a dimensão desses subespaços.

a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x - y = 3\} \subset \mathbb{R}^2$

b) $\{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : a = 2b + c \wedge b = c + d\} \subset \mathbb{R}^4$

c) $\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x - y - 2z = 0 \wedge 2x + z - 2w = 0\} \subset \mathbb{R}^4$

d) $\{(a + c, b - a, b + c, a - b) : a, b, c \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^4$

14. Em $\mathbb{R}^4$, considere o subespaço $\mathbb{W} = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : z = x - y \wedge w - 2x = 3y\}$.

a) Determine uma base de $\mathbb{W}$ e a dimensão respectiva.

b) Construa uma base de $\mathbb{R}^4$ que contenha a base de $\mathbb{W}$ que indicou em a).

15. Considere o subespaço de $\mathbb{R}^3$ definido por

$$\mathbb{W} = \{(a + b, -a - c, 2a + b + c) : a, b, c \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3.$$

a) Determine uma base e a dimensão de $\mathbb{W}$.

b) Diga, justificando, se os vectores $\mathbf{u} = [2 \ 1 \ 1]^T$ e $\mathbf{v} = [1 \ -1 \ 3]^T$ pertencem a $\mathbb{W}$ e, em caso afirmativo, determine as suas coordenadas em relação à base de $\mathbb{W}$ que indicou na alínea anterior.

16. Considere o subespaço de $\mathbb{R}^5$ definido por

$$\mathbb{W} = \{(a, b, c, d, e) \in \mathbb{R}^5 : b - c = 0 \wedge a = b + d\} \subset \mathbb{R}^5.$$

a) Indique, caso exista, um vector $(a, b, c, d, e) \in \mathbb{R}^5$ que não pertença a $\mathbb{W}$ e tal que $b = c$.

b) Determine um conjunto de vectores geradores de $\mathbb{W}$ que não sejam uma base de $\mathbb{W}$.

c) Indique a dimensão de $\mathbb{W}$.

17. Em $\mathbb{R}^4$, considere o subespaço

$$\mathbb{W} = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x - y + z - 2w = 0 \wedge 2y + z + 2w = 0 \wedge 2x + 3z - 2w = 0\}$$

Qual dos conjuntos de vectores seguintes é uma base de $\mathbb{W}$? Justifique.

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \right\}$$

$$\mathcal{C} = \left\{ \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \right\}$$

$$\mathcal{D} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \right\}$$

18. Em $\mathbb{R}^4$, considere o subespaço

$$\mathbb{W} = \left\{ (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : 2y + z - w = 0 \wedge x - 2y + z = 0 \wedge -x - 2z + w = 0 \right\}$$

Qual dos conjuntos de vectores seguintes é uma base de $\mathbb{W}$? Justifique.

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}^T \right\}$$

$$\mathcal{C} = \left\{ \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T \right\}$$

$$\mathcal{D} = \left\{ \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T \right\}$$

19. Considere o subespaço de $\mathbb{R}^3$ definido por

$$\mathbb{W} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y + 7z = 0 \wedge -4x + 8y + 5z = 0 \wedge 2x - 4y + 3z = 0 \right\}$$

e o conjunto $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} -4 & -2 & 3 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \right\}$ de vectores de $\mathbb{R}^3$, e seja ainda $\mathbb{G} = L(\mathcal{B})$ o subespaço gerado por $\mathcal{B}$.

- Determine uma base e a dimensão de $\mathbb{W}$.
- Indique uma base e a dimensão de $\mathbb{G}$ e caracterize os vectores de $\mathbb{G}$ por meio de uma condição nas suas coordenadas.
- Determine o subespaço $\mathbb{H} = \mathbb{G} \cap \mathbb{W}$, indicando uma base e a dimensão de $\mathbb{H}$.
- Será $\mathbb{G} \cup \mathbb{W}$ um subespaço de $\mathbb{R}^3$? Justifique a resposta.

20. Considere o subespaço de $\mathbb{R}^4$ definido por

$$\mathbb{W} = \left\{ (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x - 2y + 3z - 4w = 0 \right\}$$

e o conjunto $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}^T \right\}$ de vectores de $\mathbb{R}^4$, e seja ainda $\mathbb{G} = L(\mathcal{B})$ o subespaço gerado por $\mathcal{B}$.

- Determine uma base e a dimensão de $\mathbb{W}$.
- Indique uma base e a dimensão de $\mathbb{G}$ e caracterize os vectores de $\mathbb{G}$ por meio de uma condição nas suas coordenadas.
- Determine o subespaço $\mathbb{H} = \mathbb{G} \cap \mathbb{W}$, indicando uma base e a dimensão de $\mathbb{H}$.
- Será $\mathbb{G} \cup \mathbb{W}$ um subespaço de $\mathbb{R}^4$? Justifique a resposta.

21. Seja $\mathbb{W}$ um espaço vectorial real e $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ uma base de $\mathbb{W}$.

- Diga, justificando, se cada uma dos conjuntos seguintes gera $\mathbb{W}$.

$$\text{a.1) } \mathcal{C} = \{\mathbf{u}_1 + 2\mathbf{u}_2 - 3\mathbf{u}_3, \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_3\}$$

a.2) $\mathcal{D} = \{2\mathbf{u}_1 - 3\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 - 2\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3\}$

- b) Justifique por que razão o conjunto $\mathcal{F} = \{\mathbf{u}_3, \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3\}$ não é uma base de $\mathbb{W}$. Extraia dele uma base de $\mathbb{W}$ e determine as coordenadas do vector $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + 2\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3$ relativamente a essa base.

22. Seja $\mathbb{W}$ um espaço vectorial real e $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ uma base de $\mathbb{W}$.

- a) Diga, justificando, se cada uma dos conjuntos seguintes gera $\mathbb{W}$.

a.1) $\mathcal{C} = \{\mathbf{u}_1 + 2\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2, -\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3\}$

a.2) $\mathcal{D} = \{\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 + 2\mathbf{u}_3, \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3\}$

- b) Justifique por que razão o conjunto $\mathcal{F} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_3\}$ não é uma base de $\mathbb{W}$. Extraia dele uma base de $\mathbb{W}$ e determine as coordenadas do vector $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + 2\mathbf{u}_2 + 3\mathbf{u}_3$ relativamente a essa base.

23. Sejam $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ e $\mathbf{u}_4$ vectores de um espaço vectorial real $\mathbb{W}$ tais que

$$\mathbf{u}_1 \neq \mathbf{o} \wedge \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 = \mathbf{o} \wedge 2\mathbf{u}_1 + 2\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3 = \mathbf{o} \wedge \mathbf{u}_4 \notin L(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$$

Indique, justificando, qual a dimensão do subespaço $\mathbb{G} = L(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4) \subset \mathbb{W}$ gerado por aqueles quatro vectores.

24. Sejam $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ e $\mathbf{u}_4$ vectores de um espaço vectorial real $\mathbb{W}$ tais que

$$\mathbf{u}_1 \neq \mathbf{o} \wedge \mathbf{u}_1 - 2\mathbf{u}_2 = \mathbf{o} \wedge -\mathbf{u}_1 - 3\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3 = \mathbf{o} \wedge \mathbf{u}_4 \notin L(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$$

- a) Diga, justificando, se são linearmente independentes os conjuntos $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\}$ e $\mathcal{C} = \{\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\}$.
- b) Indique, justificando, uma base e a dimensão do subespaço $\mathbb{G} = L(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4) \subset \mathbb{W}$ gerado pelos quatro vectores.

25. a) Em $\mathbb{R}^3$, considere a base $\mathcal{U} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$, com $\mathbf{u}_1 = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$, $\mathbf{u}_2 = \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3$ e $\mathbf{u}_3 = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3$ e a base $\mathcal{W} = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$, com $\mathbf{w}_1 = 2\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$, $\mathbf{w}_2 = -\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3$ e $\mathbf{w}_3 = 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3$. Sendo $\mathbf{v} = 2\mathbf{u}_1 - 4\mathbf{u}_2 + 5\mathbf{u}_3$ determine a representação de $\mathbf{v}$ na base $\mathcal{W}$.

- b) Em $\mathbb{R}^3$, considere as bases $\mathcal{U} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$, com $\mathbf{u}_1 = [-1 \ 1 \ 1]^T$, $\mathbf{u}_2 = [0 \ -1 \ 2]^T$ e $\mathbf{u}_3 = [-2 \ 0 \ 1]^T$ e $\mathcal{W} = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$, com $\mathbf{w}_1 = [2 \ 2 \ -1]^T$, $\mathbf{w}_2 = [0 \ -1 \ 2]^T$ e $\mathbf{w}_3 = [2 \ 0 \ 0]^T$. Represente o vector $\mathbf{v} = 2\mathbf{w}_1 - 2\mathbf{w}_2 + 2\mathbf{w}_3$ na base $\mathcal{U}$.

- c) Em $\mathbb{R}^3$, considere as bases $\mathcal{U} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$, com $\mathbf{u}_1 = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_3$, $\mathbf{u}_2 = 2\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3$ e $\mathbf{u}_3 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$ e $\mathcal{W} = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$, com $\mathbf{w}_1 = -\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$, $\mathbf{w}_2 = \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$ e $\mathbf{w}_3 = 2\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_3$. Sendo $\mathbf{v} = -5\mathbf{w}_1 + 4\mathbf{w}_2 - \mathbf{w}_3$ determine a representação de $\mathbf{v}$ na base $\mathcal{U}$.