Ficha de Trabalho 06 e 07

Produto Interno. (Aulas 14 a 18).

Produto interno em $\mathbb{R}^n$. Vectores livres: Ângulo de dois vectores. Vectores ortogonais. Vectores em $\mathbb{R}^n$: Produto interno. Norma. Desigualdade de Cauchy-Schwarz. Desigualdade triangular. Ângulo. Distância. Vectores ortogonais. Teorema de Pitágoras.

Projectão ortogonal. Projectão ortogonal. Base ortogonal e base ortonormada. Produto externo de vectores em $\mathbb{R}^3$. Produto misto de vectores em $\mathbb{R}^3$.

Os 4 espaços fundamentais. Complemento ortogonal. Espaços fundamentais de uma matriz. Espaços fundamentais de uma matriz, característica e nulidade. Ortogonalização de Gram-Schmidt.

A saber:

1. Calcular o produto interno de vectores e saber qual o seu significado.
2. Calcular a norma, o ângulo e a distância de vectores.
3. Determinar o produto externo de vectores em $\mathbb{R}^3$ e saber qual o seu significado.
4. Verificar se dois vectores são ortogonais.
5. Dados dois vectores, calcular a projectão ortogonal de um sobre o outro.
6. Determinar uma base para o espaço coluna, espaço linha, espaço nulo e espaço nulo à esquerda de uma matriz
7. A relação entre os 4 espaços fundamentais
8. Determinar uma base para o complemento ortogonal de um subespaço.
9. Determinar uma base ortonormada de um subespaço com base no método de Gram-Schmidt.

1. Em $\mathbb{R}^2$ considere a base canónica $\mathcal{E} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$.

a) Dados os vectores $\mathbf{u} = 3\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2$ e $\mathbf{v} = 2\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2$, e sendo α o ângulo entre eles, calcule o vector

$$\mathbf{w} = \frac{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{u} - \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|} \cos(\alpha) - \text{proj}_{\mathbf{v}} \mathbf{u}.$$

b) Dados os vectores $\mathbf{u} = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$ e $\mathbf{v} = 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$, calcule o vector

$$\mathbf{w} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} - \|\mathbf{v}\| \text{proj}_{\mathbf{v}} \mathbf{u}.$$

2. Em $\mathbb{R}^4$, determine os valores de k para os quais $\|k\mathbf{u}\| = 14$, com $\mathbf{u} = [6 \ 0 \ -3 \ -2]^T$.

3. Em $\mathbb{R}^3$, calcule os valores de k para os quais os vectores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são ortogonais:

a) $\mathbf{u} = [3 \ -1 \ -2]^T$ e $\mathbf{v} = [k \ 7 \ 1]^T$.

b) $\mathbf{u} = [k \ 1 \ k]^T$ e $\mathbf{v} = [k \ 6 \ -5]^T$.

4. Seja $\mathcal{E} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ a base canónica de $\mathbb{R}^3$. Dados os vectores $\mathbf{u} = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$ e $\mathbf{v} = -\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3$

a) Calcule a projectão ortogonal de $\mathbf{u}$ sobre $\mathbf{v}$ e a componente de $\mathbf{u}$ ortogonal a $\mathbf{v}$.

- b) Calcule o produto externo entre os vectores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$.
- c) Se $\mathbb{W} = L(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, indique, justificando, uma base ortonormada para $\mathbb{W}^\perp$.

5. Em $\mathbb{R}^4$,

- a) Dados os vectores $\mathbf{u} = [1 \ -2 \ -3 \ 4]^T$ e $\mathbf{v} = [3 \ 2 \ 0 \ 1]^T$, e sendo α o ângulo entre eles, calcule o vector $\mathbf{w} = \frac{\|\mathbf{v}\|(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})}{\|\mathbf{u}\|\cos(\alpha)} \text{proj}_{\mathbf{v}} \mathbf{u}$.
- b) Verifique quais dos seguintes vectores são ortogonais: $\mathbf{u}_1 = [1 \ 1 \ 0 \ 0]^T$, $\mathbf{u}_2 = [0 \ 2 \ 0 \ 1]^T$, $\mathbf{u}_3 = [0 \ 0 \ 2 \ 3]^T$ e $\mathbf{u}_4 = [2 \ 0 \ 1 \ 0]^T$.

6. Em $\mathbb{R}^3$, calcule o produto externo dos vectores $\mathbf{u}_1 = [1 \ 1 \ 0]^T$ e $\mathbf{u}_2 = [1 \ -1 \ 0]^T$. Esboce graficamente $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$ e $\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2$.

7. Em $\mathbb{R}^3$, considere os vectores $\mathbf{u} = [-1 \ 0 \ 1]^T$ e $\mathbf{v} = [0 \ 1 \ 1]^T$ e seja θ o ângulo por eles formado. Calcule:

- a) θ .
- b) $\text{proj}_{\mathbf{v}} \mathbf{u}$.
- c) $\text{perp}_{\mathbf{v}} \mathbf{u}$.
- d) Todos os vectores $\mathbf{w} = k\mathbf{u}$ tais que $\|\mathbf{w}\| = 10$.
- e) $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$
- f) Justifique que $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u} \times \mathbf{v}\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$.

8. Em $\mathbb{R}^3$, com o produto interno usual, considere os vectores $\mathbf{u} = [3 \ -1 \ 0]^T$ e $\mathbf{v} = [1 \ 1 \ 1]^T$. Determine

- a) O seno do ângulo entre $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.
- b) A projecção ortogonal de $\mathbf{u}$ sobre $\mathbf{v}$.
- c) Todos os vectores perpendiculares a $\mathbf{v}$.
- d) Determine o valor do número real k de modo a que o vector $[0 \ k \ 1]^T$ seja ortogonal a $\mathbf{v}$.
- e) Um vector unitário simultaneamente perpendicular aos vectores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.

9. Dada a matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

- a) Determine uma base para o espaço linha da matriz.
- b) Determine uma base para o espaço coluna da matriz.
- c) Determine uma base para o núcleo da matriz.
- d) Determine uma base para o espaço nulo à esquerda da matriz.

10. a) Considere a matriz real

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Mostre que o espaço linha de $\mathbf{A}$ é o plano xoy e o espaço nulo de $\mathbf{A}$ é o eixo dos zz .

b) Determine uma matriz quadrada de ordem 3 cujo espaço nulo seja o plano xoz e cujo espaço linha seja o eixo dos yy .

11. Considere a matriz real

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

a) Indique uma base para o espaço linha de $\mathbf{A}$, $\text{lin}(\mathbf{A})$, e uma base para o espaço nulo de $\mathbf{A}$, $\text{ker}(\mathbf{A})$.

b) Seja $\mathbb{F} = \text{lin}(\mathbf{A})$ (subespaço vectorial de $\mathbb{R}^4$). Sem efectuar quaisquer cálculos indique:

b.1) $\dim(\mathbb{F}^\perp)$ e exiba uma sua base.

b.2) $\dim(\text{col}(\mathbf{A}))$ e exiba uma sua base.

b.3) $\dim(\text{ker}(\mathbf{A}^T))$.

12. Determine uma base ortonormada para o espaço nulo da matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -5 & 1 \\ 2 & -4 & -10 & 3 \end{bmatrix}$$

13. Seja $\mathbf{A}$ uma matriz real do tipo 6×3 cujas colunas são linearmente independentes. Indique quais são as dimensões dos 4 espaços fundamentais de $\mathbf{A}$: $\text{lin}(\mathbf{A})$; $\text{col}(\mathbf{A})$; $\text{ker}(\mathbf{A})$; $\text{ker}(\mathbf{A}^T)$.

14. Seja $\mathbf{A}$ uma matriz real do tipo 5×7 com característica 2. Indique, justificando, qual o valor de verdade de cada uma das proposições seguintes:

a) O espaço nulo de $\mathbf{A}$ tem dimensão 2.

b) As linhas de $\mathbf{A}$ são linearmente independentes.

c) O número máximo de colunas de $\mathbf{A}$ linearmente independentes é 2.

15. Determine uma matriz $\mathbf{A}$ tal que $[1 \ 2 \ 1]^T$ seja uma base do seu espaço coluna e $[0 \ 3 \ 2 \ -1]^T$ seja uma base do seu espaço linha.

16. Determine uma matriz quadrada 3×3 , $\mathbf{A}$, tal que $[1 \ 1 \ 1]^T$ seja uma base do espaço nulo de $\mathbf{A}$ e de $\mathbf{A}^T$

17. Em $\mathbb{R}^3$, considere os vectores $\mathbf{u}_1 = [2 \ 2 \ -1]^T$ e $\mathbf{u}_2 = [3 \ 1 \ 8]^T$.
- Prove que $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$ são ortogonais.
 - Determine um vector $\mathbf{u}_3 = [x \ y \ z]^T$ tal que $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ constitua uma base ortogonal de $\mathbb{R}^3$.
18. Considere o espaço cartesiano $\mathbb{R}^2$ dotado do produto interno canónico. Mostre que $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} -3/5 & 4/5 \end{bmatrix}^T \right\}$ é normado mas não é ortogonal.
19. Mostre que a base de $\mathbb{R}^3$ $\mathcal{B} = \left\{ [1 \ 1 \ 1]^T, [2 \ 0 \ 2]^T, [1 \ 1 \ 2]^T \right\}$ não é ortonormada.
20. Determine um vector $\mathbf{u} = [u_1 \ u_2 \ u_3]^T$, tal que os vectores $\mathbf{v} = [1 \ 1 \ 2]^T$, $\mathbf{w} = [5 \ 11 \ -8]^T$ e $\mathbf{u}$ formem uma base ortogonal de $\mathbb{R}^3$.
21. Sendo $\mathbb{W}$ o subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado pelos vectores $\mathbf{u}_1 = [1 \ -2 \ 1]^T$ e $\mathbf{u}_2 = [0 \ 1 \ -1]^T$, determine uma base para $\mathbb{W}^\perp$.
22. Sendo $\mathbb{W}$ o subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado pelo vector $\mathbf{u}_1 = [1 \ -1 \ 0]^T$, determine uma base para $\mathbb{W}^\perp$.
23. Sendo $\mathbb{W}$ o subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado pelo vector $\mathbf{u}_1 = [0 \ 1 \ -2]^T$, determine uma base ortonormada para $\mathbb{W}^\perp$, e uma base ortonormada de $\mathbb{R}^3$ só formada por vectores de $\mathbb{W}$ ou $\mathbb{W}^\perp$.
24. Sendo $\mathbb{W}$ o subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado pelos vectores $\mathbf{u}_1 = [1 \ 0 \ 1]^T$ e $\mathbf{u}_2 = [0 \ 1 \ -1]^T$, determine uma base ortonormada para $\mathbb{W}^\perp$, e uma base ortonormada de $\mathbb{R}^3$ só formada por vectores de $\mathbb{W}$ ou $\mathbb{W}^\perp$.
25. Seja $\mathbb{W}$ o subespaço de $\mathbb{R}^3$ definido por $\mathbb{W} = \{ (x, y, z) : x - y - 2z = 0 \}$
- Calcule uma base para $\mathbb{W}^\perp$.
 - Use o método de Gram-Schmidt para determinar uma base ortonormada de $\mathbb{W}$.
26. Determine uma base ortonormada do subespaço de $\mathbb{R}^3$
- $$\mathbb{W} = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = z \}$$
27. Considere o espaço vectorial real $\mathbb{R}^3$, dotado do produto interno canónico e seja
- $$\mathbb{W} = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = -y \wedge z = 2x \}$$
- Encontre uma base e a dimensão de $\mathbb{W}^\perp$.
 - Escreva o vector $\mathbf{v} = [3 \ -1 \ 4]^T$ como soma de um vector de $\mathbb{W}$ com um vector de $\mathbb{W}^\perp$.
 - Determine a distância de $\mathbf{v}$ a $\mathbb{W}$.

28. Em $\mathbb{R}^4$, seja $\mathbb{W}$ o subespaço gerado pelos vectores (linearmente independentes) $\mathbf{u}_1 = [-1 \ 0 \ 1 \ 1]^T$, $\mathbf{u}_2 = [0 \ -2 \ 0 \ 1]^T$ e $\mathbf{u}_3 = [1 \ 0 \ -1 \ 2]^T$. Use o método de Gram-Schmidt para obter uma base ortonormada de $\mathbb{W}$ a partir da base dada.

29. Verifique se é ortogonal a matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 5 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

30. Considere os vectores de $\mathbb{R}^3$, $\mathbf{u}_1 = [0 \ 0 \ 1]^T$, $\mathbf{u}_2 = [0 \ 1 \ 1]^T$ e $\mathbf{u}_3 = [1 \ 1 \ 1]^T$.

- Prove que $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$.
- Seja $\mathbb{F}$ o subespaço gerado por $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_3$, $\mathbb{F} = L(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_3)$. Caracterize os vectores de $\mathbb{F}$ por meio de uma condição nas suas coordenadas.
- Determine uma base de $\mathbb{F}^\perp$.
- Determine uma base ortogonal de $\mathbb{F}$, $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$, e a projecção ortogonal de $\mathbf{u}_2$ sobre $\mathbb{F}$.
- Indique um vector $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ tal que $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ forme uma base ortogonal de $\mathbb{R}^3$.