AULA 4

- Note bem: a leitura destes apontamentos não dispensa de modo algum a leitura atenta da bibliografia principal da cadeira
- Chama-se a atenção para a importância do trabalho pessoal a realizar pelo aluno resolvendo os problemas apresentados na bibliografia, sem consulta prévia das soluções propostas, análise comparativa entre as suas resposta e a respostas propostas, e posterior exposição junto do docente de todas as dúvidas associadas.

TÓPICOS

Equação linear.
Sistema de equações lineares.
Equação matricial.
Soluções do sistema.
Método de Gauss-Jordan.
Classificação de sistemas quanto à solução.
Sistemas homogéneos.

4. Sistemas de Equações Lineares.

4.1. Equação linear. Sistema de equações lineares.

Uma **equação linear** de n variáveis $x_1, x_2, \dots, x_n$, designadas por **incógnitas**, é uma equação da forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$$

em que $a_1, a_2, \dots, a_n$ e b são constantes ($\in \mathbb{R}$ ou $\in \mathbb{C}$).

Um **sistema de equações lineares** é um conjunto de equações lineares, ou seja, um conjunto de equações da forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

em que a_{ij} , os **coeficientes do sistema**, e b_k , os **termos independentes**, são constantes ($\in \mathbb{R}$ ou $\in \mathbb{C}$), para $i, k = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, n$.

4.2. Equação matricial.

Um sistema linear pode ser representado por uma **equação matricial**

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

em que

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

é a **matriz simples**, ou **matriz dos coeficientes** do sistema,

$$\mathbf{x} = [x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n]^T$$

é a **matriz (vector) coluna das incógnitas**, e

$$\mathbf{b} = [b_1 \quad b_2 \quad \cdots \quad b_m]^T$$

é a **matriz (vector) coluna dos termos independentes**.

Exemplos

1. O sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$$

pode ser escrito na forma de uma equação matricial, $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

sendo a matriz dos coeficientes

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

o vector coluna das incógnitas:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = [x \quad y]^T$$

, e o vector coluna dos termos independentes

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} = [5 \quad 4]^T$$

4.3. Soluções do sistema. Método de Gauss-Jordan.

Uma **solução de um sistema** é um vector coluna $\mathbf{s} = [s_1 \ s_2 \ \cdots \ s_n]^T$, tal que as equações do sistema são todas satisfeitas quando fazemos as substituições, $x_1 = s_1$, $x_2 = s_2$, $\cdots$, $x_n = s_n$.

Se dois sistemas lineares $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ e $\mathbf{Cx} = \mathbf{d}$, são tais que a matriz $[\mathbf{C} \mid \mathbf{d}]$ é obtida da matriz $[\mathbf{A} \mid \mathbf{b}]$ em resultado da aplicação de um conjunto de operações elementares sobre linhas, então os dois sistemas possuem as mesmas soluções, dizendo-se **sistemas equivalentes**.

O **método de Gauss-Jordan** de resolução de sistemas consiste em aplicar operações elementares às linhas da **matriz completa** (ou **matriz ampliada**) do sistema, $[\mathbf{A} \mid \mathbf{b}]$, até que a matriz dos coeficientes esteja na forma escalonada reduzida.

Exemplos

2. O sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$$

tem matriz completa

$$[\mathbf{A} \mid \mathbf{b}] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \end{array} \right]$$

Por aplicação do método de Gauss-Jordan

$$\begin{aligned} [\mathbf{A} \mid \mathbf{b}] &= \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \end{array} \right] \\ &\sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -3 & -6 \end{array} \right] && L_2 - 2L_1 \rightarrow L_2 \\ &\sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{array} \right] && -1/3 L_2 \rightarrow L_2 \\ &\sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array} \right] = [\mathbf{C} \mid \mathbf{d}] && L_1 - 2L_2 \rightarrow L_1 \end{aligned}$$

, resulta o sistema $\mathbf{CX} = \mathbf{d}$, equivalente a $\mathbf{AX} = \mathbf{b}$,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

, ficando determinada a solução do sistema

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

4.4. Classificação de sistemas quanto à solução.

Quanto ao número de soluções que admite, um sistema com n incógnitas classifica-se como (dita a **natureza do sistema**):

- **Sistema possível e determinado**, quando tem uma única solução
(sse $\text{car}(\mathbf{A}) = \text{car}([\mathbf{A} \mid \mathbf{b}]) = n$).
- **Sistema impossível**, quando não tem soluções
(sse $\text{car}(\mathbf{A}) \neq \text{car}([\mathbf{A} \mid \mathbf{b}])$).

Se a última linha não nula da forma escalonada reduzida da matriz completa do sistema for da forma $[0 \cdots 0 \mid b'_m]$ com $b'_m \neq 0$ o sistema é impossível.

- **Sistema possível e indeterminado**, quando tem infinitas soluções.
(sse $\text{car}(\mathbf{A}) = \text{car}([\mathbf{A} \mid \mathbf{B}]) < n$);

Se o sistema tiver solução, e a forma escalonada reduzida da matriz completa possuir colunas sem pivots, o sistema é possível e indeterminado.

As variáveis que não estão associadas a pivots são chamadas **variáveis livres** ou **variáveis arbitrarias**, isto é, podem assumir qualquer valor, sendo o seu número chamado o **grau de indeterminação do sistema**, $g = n - \text{car}(\mathbf{A})$.

As variáveis associadas aos pivots, ditas **variáveis principais**, têm os seus valores dependentes das variáveis livres.

O conjunto de todas as soluções de um sistema possível e indeterminado é chamada **solução geral do sistema**.

Exemplos

3. O sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$$

que, como vimos, tem por solução $x = 1$ e $y = 2$, é um sistema possível e determinado.

Como vimos

$$[\mathbf{A} \mid \mathbf{b}] \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

pelo que $\text{car}(\mathbf{A}) = \text{car}([\mathbf{A} \mid \mathbf{b}]) = 2 = n$.

4. Do sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ 2x - 2y = -4 \end{cases}$$

resulta, recorrendo ao método de Gauss-Jordan,

$$\begin{aligned} [\mathbf{A} \mid \mathbf{b}] &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & -4 \end{bmatrix} \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} = [\mathbf{C} \mid \mathbf{d}] \quad L_2 - 2L_1 \rightarrow L_2 \end{aligned}$$

Dado que a última linha não nula da forma escalonada reduzida da matriz completa do sistema é da forma $[0 \cdots 0 \mid b'_m]$ com $b'_m = -4 \neq 0$ o sistema é impossível:

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ 0 = -4 \end{cases}$$

De modo equivalente, podemos concluir que o sistema é impossível, dado que $\text{car}(\mathbf{A}) = 1 \neq 2 = \text{car}([\mathbf{A} \mid \mathbf{b}])$.

5. Do sistema de equações lineares

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 4x + 2y = 6 \end{cases}$$

resulta, recorrendo ao método de Gauss-Jordan,

$$\begin{aligned} [\mathbf{A} \mid \mathbf{b}] &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \end{bmatrix} \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 3/2 \\ 4 & 2 & 6 \end{bmatrix} \quad -1/2 L_1 \rightarrow L_1 \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [\mathbf{C} \mid \mathbf{d}] \quad L_2 - 4L_1 \rightarrow L_2 \end{aligned}$$

Dado que a forma escalonada reduzida da matriz completa possui colunas sem pivots (a 2ª coluna) o sistema é possível e indeterminado. O sistema considerado é equivalente a

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

, tendo portanto como solução

$$x + \frac{1}{2}y = \frac{3}{2}$$

A variável que não estão associada a um pivot, y , é uma variável livre. Tendo uma só variável livre, o sistema tem um grau de indeterminação $g = 1$ (também dito sistema simplesmente indeterminado). O sistema tem uma variável principal (associada a um pivot), x , com um valor dependente da variável livre. A solução geral do sistema é expressa na forma

$$x = -\frac{1}{2}y + \frac{3}{2}$$

De modo equivalente, podemos concluir que o sistema é indeterminado, dado que $\text{car}(\mathbf{A}) = \text{car}([\mathbf{A} \mid \mathbf{b}]) = 1 < n = 2$, com um grau de indeterminação $g = n - \text{car}(\mathbf{A}) = 2 - 1 = 1$.

4.5. Sistemas homogêneos.

Um sistema da forma $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ é designado por **sistema homogêneo**.

Todo o sistema homogêneo admite pelo menos a solução $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, chamada **solução trivial**. Se um sistema homogêneo tiver outra solução para além da solução trivial então tem infinitas soluções.

Se $\mathbf{A}_{m \times n}$ é tal que $m < n$, então o sistema homogêneo $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ tem soluções diferentes da solução trivial, ou seja, todo o sistema homogêneo com menos equações do que incógnitas tem infinitas soluções.

Seja $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ um sistema possível e indeterminado, $\mathbf{x} = \mathbf{x}_p$ uma **solução particular** do sistema, ou seja, uma qualquer das suas soluções, e $\mathbf{x} = \mathbf{x}_h$ a solução geral do sistema homogêneo associado, $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$, então $\mathbf{x} = \mathbf{x}_h + \mathbf{x}_p$ é a solução geral do sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

Exemplos

6. Seja o sistema, $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

O sistema homogêneo associado, $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$, dado que

$$\begin{aligned} [\mathbf{A} \mid \mathbf{0}] &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 4 & 0 \end{bmatrix} \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = -x_4 \end{cases} \end{aligned}$$

tem como solução geral, $\mathbf{x} = \mathbf{x}_h$,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a \\ -b \\ a \\ b \end{bmatrix}$$

Sabendo que $\mathbf{x}_p = [1 \ 2 \ -1 \ 0]^T$ é uma solução particular do sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, então a sua solução geral é da forma

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_h + \mathbf{x}_p = \begin{bmatrix} -a \\ -b \\ a \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-a \\ 2-b \\ a-1 \\ b \end{bmatrix}$$