

AULA 6

- Note bem: a leitura destes apontamentos não dispensa de modo algum a leitura atenta da bibliografia principal da cadeira
- Chama-se a atenção para a importância do trabalho pessoal a realizar pelo aluno resolvendo os problemas apresentados na bibliografia, sem consulta prévia das soluções propostas, análise comparativa entre as suas resposta e a respostas propostas, e posterior exposição junto do docente de todas as dúvidas associadas.

TÓPICOS

Matriz inversa.

Método de condensação.

Matriz ortogonal.

Propriedades da álgebra matricial.

6. Matriz inversa.

6.1. Matriz inversa.

Todo o número real não nulo, a , possui inverso, isto é, existe um real b tal que $ab = ba = 1$. O inverso é único, usando-se a notação $b = a^{-1}$. Nem todas as matrizes, \mathbf{A} , quadradas não nulas, possuem inversa, ou seja, nem sempre existe uma matriz \mathbf{B} tal que $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}$.

Uma matriz quadrada $\mathbf{A}_{n \times n}$ diz-se **invertível** (ou **regular**, ou não singular), se existir uma matriz \mathbf{B} tal que

$$\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}_n$$

, em que \mathbf{I}_n é a matriz identidade de ordem n .

Se \mathbf{A} é invertível, a sua inversa é única e denota-se por \mathbf{A}^{-1} . \mathbf{A} é invertível sse $\text{car}(\mathbf{A}) = n$. Uma matriz que não tem inversa diz-se uma **matriz singular** (ou não regular, ou não invertível).

Exemplos

1. Seja a matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

A inversa de \mathbf{A} é

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

, como podemos verificar:

$$\mathbf{AA}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \times 3 - 5 \times 1 & -2 \times 5 + 5 \times 2 \\ 1 \times 3 - 3 \times 1 & -1 \times 5 + 3 \times 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}_2$$

6.2. Método de condensação.

Se \mathbf{A} é uma matriz quadrada de ordem n invertível, $\text{car}(\mathbf{A}) = n$, pelo que, efectuando operações elementares sobre linhas, é possível transformar a matriz $[\mathbf{A} \mid \mathbf{I}]$ na matriz $[\mathbf{I} \mid \mathbf{B}]$. Tendo em conta a resolução de sistemas de equações lineares, facilmente se conclui que $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$. Este método de determinação da inversa de uma matriz é designado por **método de condensação**.

Exemplo

2. Seja a matriz:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$

Recorrendo ao método de condensação, podemos calcular a inversa de \mathbf{B}

$$\begin{aligned} [\mathbf{B} \mid \mathbf{I}_3] &= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ &\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 6 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right] && \begin{array}{l} L_2 - 2L_1 \rightarrow L_2 \\ L_3 - 1L_1 \rightarrow L_3 \end{array} \\ &\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 6 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right] && L_2 \leftrightarrow L_3 \\ &\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 1 & 2 \end{array} \right] && \begin{array}{l} L_1 - 2L_2 \rightarrow L_1 \\ L_3 + 2L_2 \rightarrow L_3 \end{array} \\ &\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1/2 & 1 \end{array} \right] && \frac{1}{2}L_3 \rightarrow L_3 \\ &\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 9 & -3/2 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1/2 & 1 \end{array} \right] && \begin{array}{l} L_1 - 3L_3 \rightarrow L_1 \\ L_2 + 2L_3 \rightarrow L_2 \end{array} \\ &\sim [\mathbf{I}_3 \mid \mathbf{B}^{-1}] \end{aligned}$$

Logo

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 9 & -3/2 & -5 \\ -5 & 1 & 3 \\ -2 & 1/2 & -1 \end{bmatrix}$$



Cálculo da inversa, $\text{inv}(\mathbf{A})$,

>> $\mathbf{A} = [2 \ 5; 1 \ 3]$:

```
>> inv(A)
ans =
     3     -5
    -1     2
>> B=[1 2 -1; 2 2 4; 1 3 -3] ;
>> inv(B)
ans =
     9.0000    -1.5000    -5.0000
    -5.0000     1.0000     3.0000
    -2.0000     0.5000     1.0000
```

Podemos ver o resultado na forma racional com o comando `format rat`

```
>> format rat
>> inv(B)
ans =
     9           -3/2           -5
    -5           1           3
    -2           1/2           1
```

Para restabelecer o formato decimal usamos o comando `format short`

Poderíamos calcular a inversa pelo método de condensação (embora não seja necessário dada a existência da função `inv`)

```
>> D=[B eye(3)]
D =
     1     2     -1     1     0     0
     2     2     4     0     1     0
     1     3     -3     0     0     1
>> D=rref(D)
D =
     1.0000         0         0     9.0000    -1.5000    -5.0000
         0     1.0000         0    -5.0000     1.0000     3.0000
         0         0     1.0000    -2.0000     0.5000     1.0000
>> D=D(:,4:6)
D =
     9.0000    -1.5000    -5.0000
    -5.0000     1.0000     3.0000
    -2.0000     0.5000     1.0000
```

6.3. Matriz ortogonal.

Uma matriz quadrada $A_{n \times n}$ diz-se ortogonal sse a sua inversa for igual à sua transposta

$$A^{-1} = A^T$$

ou seja

$$AA^T = A^T A = I_n$$

Exemplos

3. Seja a matriz:

$$C = \begin{bmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

A transposta de C é

$$C^T = \begin{bmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

Dado que

$$\begin{aligned} CC^T &= \begin{bmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 \\ -1/2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 \\ -1/2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= I_2 \end{aligned}$$

, a matriz C é uma matriz ortogonal

$$C^{-1} = C^T = \begin{bmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$



```
>> C=[1/2 sqrt(3)/2; sqrt(3)/2 -1/2]
```

```
C =
```

```
    0.5000    0.8660
```

```
    0.8660   -0.5000
```

```
>> C*C.'
```

```
ans =
```

```
    1.0000    0
```

```
    0    1.0000
```

6.4. Propriedades da álgebra matricial

Sempre que as expressões estejam definidas, são demonstráveis as seguintes propriedades:

Adição

$$\begin{aligned} \mathbf{A} + \mathbf{B} &= \mathbf{B} + \mathbf{A} && \text{(comutativa)} \\ \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) &= (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} && \text{(associativa)} \\ \mathbf{A} + \mathbf{0} &= \mathbf{A} && \text{(elemento neutro)} \\ \mathbf{A} + (-\mathbf{A}) &= \mathbf{0} && \text{(elemento simétrico)} \end{aligned}$$

Multiplicação por escalar

$$\begin{aligned} \alpha(\beta\mathbf{A}) &= (\alpha\beta)\mathbf{A} \\ (\alpha + \beta)\mathbf{A} &= \alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{A} \\ \alpha(\mathbf{A} + \mathbf{B}) &= \alpha\mathbf{A} + \alpha\mathbf{B} \\ 1\mathbf{A} &= \mathbf{A} \end{aligned}$$

Multiplicação

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{C}) &= (\mathbf{A}\mathbf{B})\mathbf{C} && \text{(associativa)} \\ \mathbf{A}\mathbf{I}_n = \mathbf{I}_m\mathbf{A} &= \mathbf{A} && \text{(elemento neutro)} \\ \mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) &= \mathbf{A}\mathbf{B} + \mathbf{A}\mathbf{C} \\ (\mathbf{B} + \mathbf{C})\mathbf{A} &= \mathbf{B}\mathbf{A} + \mathbf{C}\mathbf{A} && \text{(distributiva)} \\ \alpha(\mathbf{A}\mathbf{B}) &= (\alpha\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{A}(\alpha\mathbf{B}) \\ \mathbf{A}\mathbf{0} = \mathbf{0}\mathbf{A} &= \mathbf{0} && \text{(elemento absorvente)} \end{aligned}$$

Transposição

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}^T)^T &= \mathbf{A} \\ (\mathbf{A} + \mathbf{B})^T &= \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T \\ (\alpha\mathbf{A})^T &= \alpha\mathbf{A}^T \\ (\mathbf{A}\mathbf{B})^T &= \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T \\ (\mathbf{A}^k)^T &= (\mathbf{A}^T)^k \end{aligned}$$

Inversa

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}^{-1})^{-1} &= \mathbf{A} \\ (\mathbf{A}\mathbf{B})^{-1} &= \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1} \\ (\alpha\mathbf{A})^{-1} &= \alpha^{-1}\mathbf{A}^{-1}, \quad (\alpha \neq 0) \\ (\mathbf{A}^T)^{-1} &= (\mathbf{A}^{-1})^T \\ \mathbf{A}\mathbf{B} = \mathbf{0} &\not\Rightarrow (\mathbf{A} = \mathbf{0} \vee \mathbf{B} = \mathbf{0}) && \text{(só se } \mathbf{A} \text{ ou } \mathbf{B} \text{ for invertível)} \\ \mathbf{A}\mathbf{B} = \mathbf{A}\mathbf{C} &\not\Rightarrow \mathbf{B} = \mathbf{C} && \text{(só se } \mathbf{A} \text{ for invertível)} \end{aligned}$$

Exercícios.

6.1. Dada a matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Determine a matriz inversa \mathbf{A}^{-1} .

Temos

$$\begin{aligned} [\mathbf{A} \mid \mathbf{I}_3] &= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ &\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] && L_1 \leftrightarrow L_2 \\ &\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 5 & 0 & -3 & 1 \end{array} \right] && -3L_1 + L_3 \rightarrow L_3 \\ &\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 5 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -17 & -6 & -3 & -1 \end{array} \right] && \begin{array}{l} 2L_2 + L_1 \rightarrow L_1 \\ -6L_2 + L_3 \rightarrow L_3 \end{array} \\ &\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 5 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6/17 & 3/17 & -1/17 \end{array} \right] && -\frac{1}{17}L_3 \rightarrow L_3 \\ &\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 4/17 & 2/17 & 5/17 \\ 0 & 1 & 0 & 5/17 & -6/17 & 2/17 \\ 0 & 0 & 1 & 6/17 & 3/17 & -1/17 \end{array} \right] && \begin{array}{l} -2L_3 + L_2 \rightarrow L_2 \\ -5L_3 + L_1 \rightarrow L_1 \end{array} \end{aligned}$$

, pelo que

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 4/17 & 2/17 & 5/17 \\ 5/17 & -6/17 & 2/17 \\ 6/17 & 3/17 & -1/17 \end{bmatrix} = \frac{1}{17} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 5 \\ 5 & -6 & 2 \\ 6 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$



```
>> A=[0 1 2 ; 1 -2 1; 3 0 -2];
>> format rat
>> inv(A)
ans =
```

```
    4/17    2/17    5/17
    5/17   -6/17    2/17
    6/17    3/17   -1/17
```

6.2. Considere o sistema de equações lineares na forma matricial, $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Calcule a inversa da matriz simples do sistema, \mathbf{A}^{-1} , e, com base nesta, determine a solução do sistema.

Recorrendo ao método de condensação temos

$$\begin{aligned} [\mathbf{A} \mid \mathbf{I}_3] &= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ &\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] && \begin{array}{l} -L_1 + L_2 \rightarrow L_2 \\ L_1 + L_3 \rightarrow L_3 \end{array} \\ &\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] && L_2 + L_3 \rightarrow L_3 \\ &\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] && -L_3 + L_1 \rightarrow L_1 \\ &\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] && L_2 + 2L_1 \rightarrow L_1 \\ &\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] && \begin{array}{l} 1/2 L_1 \rightarrow L_1 \\ -1/2 L_2 \rightarrow L_2 \end{array} \end{aligned}$$

, pelo que

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & -1 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Conhecida a inversa da matriz simples do sistema, temos

$$\begin{aligned} \mathbf{Ax} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{A}^{-1}\mathbf{Ax} &= \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} \\ \mathbf{I}_3\mathbf{x} &= \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} \\ \mathbf{x} &= \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$



```
>> A=[1 1 1;1 -1 1;-1 1 0];
>> b=[0 0 1]';
>> format rat
>> inv(A)
ans =
    1/2    -1/2    -1
    1/2    -1/2     0
     0     1     1

>> x=inv(A)*b
x =
    -1
     0
     1
```

6.3. Sendo A, B e C matrizes quadradas quaisquer, diga se as proposições seguintes são verdadeiras ou falsas (admite-se que as operações indicadas estão definidas).

1. $(AB)^T = A^T B^T$
2. $2AC + BC = C(2A + B)$
3. $AB = 0 \Rightarrow A = 0 \vee B = 0$
4. $(ABC)^T = C^T B^T A^T$
5. $BA + 2A = (B + 2)A$
6. $A^2 A^3 = A^5$

	1	2	3	4	5	6
Verdadeira	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
Falsa	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

1. $(AB)^T \neq A^T B^T$. Pode demonstrar-se, isso sim, que

$$(AB)^T = B^T A^T$$

2. Não esquecer que o produto de matrizes não é comutativo. Podendo verificar-se em particular que $2AC + BC = C(2A + B)$, caso as matrizes C e $(2A + B)$ sejam permutáveis, em geral, isto é, para quaisquer matrizes quadradas A, B e C , temos

$$2AC + BC = (2A + B)C \\ \neq C(2A + B)$$

3. $AB = \bar{0} \Rightarrow A = \bar{0} \vee B = \bar{0}$ apenas nos casos em que A ou B for invertível. Temos nesses casos que

$$AB = 0 \Rightarrow A^{-1}AB = A^{-1}0 \Rightarrow IB = 0 \Rightarrow B = 0 \\ AB = 0 \Rightarrow ABB^{-1} = 0B^{-1} \Rightarrow AI = 0 \Rightarrow A = 0$$

5. Tenha-se em atenção que $BA + 2A = (B + 2I)A \neq (B + 2)A$. $B + 2$, a soma de uma matriz com um escalar, é uma operação não definida.

6.4. Sendo A, B e C matrizes quadradas quaisquer, diga se as proposições seguintes são verdadeiras ou falsas (admita-se que as operações indicadas estão definidas).

$$A(B + C) = BA + CA$$

$$AB + B = (A + I_n)B$$

$$AB = BA$$

$$A^2 + AB = A(A + B)$$

$$(AB)^2 = A^2B^2$$

$$AB = AC \Rightarrow B = C$$

	1	2	3	4	5	6
Verdadeira	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Falsa	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

6.5. Admitindo que A e B são matrizes de ordem n , B é regular, e A e B são permutáveis, mostre que A e B^{-1} também são matrizes permutáveis.

Temos

$$AB = BA$$

$$B^{-1}(AB)B^{-1} = B^{-1}(BA)B^{-1}$$

$$(B^{-1}A)(BB^{-1}) = (B^{-1}B)(AB^{-1})$$

$$(B^{-1}A)I_n = I_n(AB^{-1})$$

$$B^{-1}A = AB^{-1}$$

6.6. Admitindo que A e B são matrizes ortogonais de ordem n , mostre que

$$A^T(B - I_n)^T B + A^{-1}B - A^T = 0$$

Temos

$$A^T(B - I_n)^T B + A^{-1}B - A^T = 0$$

$$A^T(B^T - I_n^T)B + A^{-1}B - A^T = 0$$

$$A^T(B^T - I_n)B + A^{-1}B - A^T = 0$$

Sendo A uma matriz ortogonal, $A^{-1} = A^T$, pelo que

$$A^T(B^T - I_n)B + A^{-1}B - A^T = 0$$

$$A^T(B^T B - I_n B) + A^T B - A^T = 0$$

$$A^T(B^T B - I_n B + B - I_n) = 0$$

Sendo B uma matriz ortogonal, $B^T B = B^{-1}B = I_n$, pelo que

$$A^T(B^T B - I_n B + B - I_n) = 0$$

$$A^T(I_n - B + B - I_n) = 0$$

$$A^T(0) = 0$$

6.7. Determine a matriz real \mathbf{X} tal que $((\mathbf{BA})^{-1} - 2\mathbf{X}^T)^T \mathbf{C}^{-1} = \mathbf{I}_2$, sendo

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Multiplicando à direita ambos os membros da equação por \mathbf{C} , temos:

$$\begin{aligned} ((\mathbf{BA})^{-1} - 2\mathbf{X}^T)^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{C} &= \mathbf{I}_2 \mathbf{C} \\ ((\mathbf{BA})^{-1} - 2\mathbf{X}^T)^T \mathbf{I}_2 &= \mathbf{C} \\ ((\mathbf{BA})^{-1} - 2\mathbf{X}^T)^T &= \mathbf{C} \end{aligned}$$

, e atendendo a que a transposta da soma é igual à soma das transpostas, temos:

$$\begin{aligned} ((\mathbf{BA})^{-1} - 2\mathbf{X}^T)^T &= \mathbf{C} \\ ((\mathbf{BA})^{-1})^T - (2\mathbf{X}^T)^T &= \mathbf{C} \\ ((\mathbf{BA})^{-1})^T - 2\mathbf{X} &= \mathbf{C} \\ -2\mathbf{X} &= \mathbf{C} - ((\mathbf{BA})^{-1})^T \\ \mathbf{X} &= -\frac{1}{2}(\mathbf{C} - ((\mathbf{BA})^{-1})^T) \end{aligned}$$

Sendo

$$\mathbf{BA} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

, e,

$$[\mathbf{BA} \mid \mathbf{I}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \dots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} = [\mathbf{I} \mid (\mathbf{BA})^{-1}]$$

pelo que

$$(\mathbf{BA})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

temos

$$((\mathbf{BA})^{-1})^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

e, finalmente

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= -\frac{1}{2}(\mathbf{C} - ((\mathbf{BA})^{-1})^T) \\ \mathbf{X} &= -\frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

6.8. Supondo que \mathbf{A} , \mathbf{B} e \mathbf{C} são matrizes quadradas de ordem n invertíveis simplifique a expressão matricial

$$((\mathbf{C}^T)^{-1}(\mathbf{AC} - \mathbf{BC})^T - \mathbf{B}^T)^T - \mathbf{A}$$

Atendendo a que a inversa da transposta é igual à transposta da inversa, temos

$$\begin{aligned} & ((\mathbf{C}^T)^{-1}(\mathbf{AC} - \mathbf{BC})^T - \mathbf{B}^T)^T - \mathbf{A} \Leftrightarrow \\ & ((\mathbf{C}^{-1})^T(\mathbf{AC} - \mathbf{BC})^T - \mathbf{B}^T)^T - \mathbf{A} \end{aligned}$$

Atendendo a que $\mathbf{B}^T \mathbf{A}^T = (\mathbf{AB})^T$, temos

$$\begin{aligned} & ((\mathbf{C}^{-1})^T(\mathbf{AC} - \mathbf{BC})^T - \mathbf{B}^T)^T - \mathbf{A} \Leftrightarrow \\ & (((\mathbf{AC} - \mathbf{BC})\mathbf{C}^{-1})^T - \mathbf{B}^T)^T - \mathbf{A} \Leftrightarrow \\ & ((\mathbf{ACC}^{-1} - \mathbf{BCC}^{-1})^T - \mathbf{B}^T)^T - \mathbf{A} \Leftrightarrow \\ & ((\mathbf{AI} - \mathbf{BI})^T - \mathbf{B}^T)^T - \mathbf{A} \Leftrightarrow \\ & ((\mathbf{A} - \mathbf{B})^T - \mathbf{B}^T)^T - \mathbf{A} \end{aligned}$$

Finalmente, atendendo a que a transposta da soma é igual à soma das transpostas, temos:

$$\begin{aligned} & ((\mathbf{A} - \mathbf{B})^T - \mathbf{B}^T)^T - \mathbf{A} \Leftrightarrow \\ & (\mathbf{A} - \mathbf{B}) - \mathbf{B} - \mathbf{A} \Leftrightarrow \\ & -2\mathbf{B} \end{aligned}$$

6.9. Sejam \mathbf{A} e \mathbf{B} matrizes quadradas de ordem n , com \mathbf{A} ortogonal. Mostre que

$$\mathbf{B}(\mathbf{A}^{-1} - \mathbf{I}_n)^T \mathbf{A}^T + \mathbf{BA}^{-1} = \mathbf{B}$$

Atendendo a que a transposta da soma é igual à soma das transpostas e a que a inversa da transposta é igual à transposta da inversa, temos:

$$\begin{aligned} & \mathbf{B}(\mathbf{A}^{-1} - \mathbf{I}_n)^T \mathbf{A}^T + \mathbf{BA}^{-1} = \mathbf{B} \\ & \mathbf{B}((\mathbf{A}^{-1})^T - \mathbf{I}_n^T) \mathbf{A}^T + \mathbf{BA}^{-1} = \mathbf{B} \\ & \mathbf{B}((\mathbf{A}^T)^{-1} - \mathbf{I}_n) \mathbf{A}^T + \mathbf{BA}^{-1} = \mathbf{B} \\ & \mathbf{B}((\mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{A}^T - \mathbf{I}_n \mathbf{A}^T) + \mathbf{BA}^{-1} = \mathbf{B} \\ & \mathbf{B}(\mathbf{I}_n - \mathbf{A}^T) + \mathbf{BA}^{-1} = \mathbf{B} \\ & \mathbf{BI}_n - \mathbf{BA}^T + \mathbf{BA}^{-1} = \mathbf{B} \\ & \mathbf{B} - \mathbf{BA}^T + \mathbf{BA}^{-1} = \mathbf{B} \end{aligned}$$

Sendo \mathbf{A} ortogonal, então $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^{-1}$, pelo que

$$\begin{aligned} & \mathbf{B} - \mathbf{BA}^T + \mathbf{BA}^{-1} = \mathbf{B} \\ & \mathbf{B} - \mathbf{BA}^{-1} + \mathbf{BA}^{-1} = \mathbf{B} \\ & \mathbf{B} = \mathbf{B} \end{aligned}$$

6.10. Considere o seguinte sistema de equações lineares, nas incógnitas reais x , y e z , onde a e b são parâmetros reais:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ -x + 2ay + (a - 3)z = a + b \\ 2(a + 1)y - (2a + 3)z = a - 2b - 3 \end{cases}$$

- a) Resolva o sistema para $a = b = 0$.
- b) Sendo \mathbf{A} a matriz simples do sistema dado para $a = b = 0$, mostre que \mathbf{A} é regular e determine a inversa \mathbf{A}^{-1} .
- c) Utilize \mathbf{A}^{-1} para confirmar o resultado obtido em b).
- d) Discuta o sistema, em função dos valores dos parâmetros reais a e b .

a) Para $a = b = 0$ temos o sistema, na forma matricial,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Recorrendo ao método de Gauss-Jordan, temos:

$$[\mathbf{A} \mid \mathbf{b}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & -3 \end{bmatrix} \sim \dots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Tendo portanto como solução

$$\begin{cases} x = -3 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$$

b) Vimos na alínea anterior que

$$\text{car}(\mathbf{A}) = 3 = n$$

, logo \mathbf{A} é invertível. Temos

$$[\mathbf{A} \mid \mathbf{I}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \dots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & 1/3 & -1/3 \end{bmatrix} = [\mathbf{I} \mid \mathbf{A}^{-1}]$$

, logo

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & -1/3 \end{bmatrix}$$

c) Temos

$$\begin{aligned} \mathbf{Ax} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &= \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} \end{aligned}$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & -1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Confirmando o resultado obtido em a).

d) Escrevendo a matriz completa do sistema, temos:

$$\begin{aligned} [\mathbf{A} \mid \mathbf{b}] &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 2a & a-3 & a+b \\ 0 & 2(a+1) & -(2a+3) & a-2b-3 \end{bmatrix} \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2(a+1) & a & a+b \\ 0 & 2(a+1) & -2a-3 & a-2b-3 \end{bmatrix} && L_2 + L_1 \rightarrow L_2 \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2(a+1) & a & a+b \\ 0 & 0 & -3(a+1) & -3(b+1) \end{bmatrix} && L_3 - L_2 \rightarrow L_3 \end{aligned}$$

Para $(a + 1) \neq 0$, ou seja, $a \neq -1$, podemos dividir a 2ª e 3ª linha por $(a + 1)$. Temos portanto aqui uma primeira condição

$a = -1$	$a \neq -1$
$[\mathbf{A} \mid \mathbf{b}] \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & b-1 \\ 0 & 0 & 0 & -3(b+1) \end{bmatrix} L_2 \rightarrow L_3$	$[\mathbf{A} \mid \mathbf{b}] \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & \frac{a}{(a+1)} & \frac{a+b}{(a+1)} \\ 0 & 0 & -3 & \frac{-3(b+1)}{(a+1)} \end{bmatrix}$ <p>O sistema é possível e determinado.</p>

Para $a = -1$, temos

$b = -1$	$b \neq -1$
$[\mathbf{A} \mid \mathbf{b}] \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ <p>O sistema é possível e (simplesmente) indeterminado.</p>	$[\mathbf{A} \mid \mathbf{b}] \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & b-1 \\ 0 & 0 & 0 & b' \neq 0 \end{bmatrix}$ <p>O sistema é impossível.</p>

Resumindo

$$a \neq -1 \Rightarrow \text{O sistema é possível e determinado}$$

$$a = -1 \begin{cases} b = -1 \Rightarrow \text{O sistema é possível e (simplesmente) indeterminado} \\ b \neq -1 \Rightarrow \text{O sistema é impossível} \end{cases}$$