

# AULA 10

- Note bem: a leitura destes apontamentos não dispensa de modo algum a leitura atenta da bibliografia principal da cadeira
- Chama-se a atenção para a importância do trabalho pessoal a realizar pelo aluno resolvendo os problemas apresentados na bibliografia, sem consulta prévia das soluções propostas, análise comparativa entre as suas resposta e a respostas propostas, e posterior exposição junto do docente de todas as dúvidas associadas.

---

## TÓPICOS

---

Estruturas algébricas.

---

Espaço vectorial.

---

Combinação linear.

---

Independência linear.

---

---

---

---

---

---

---

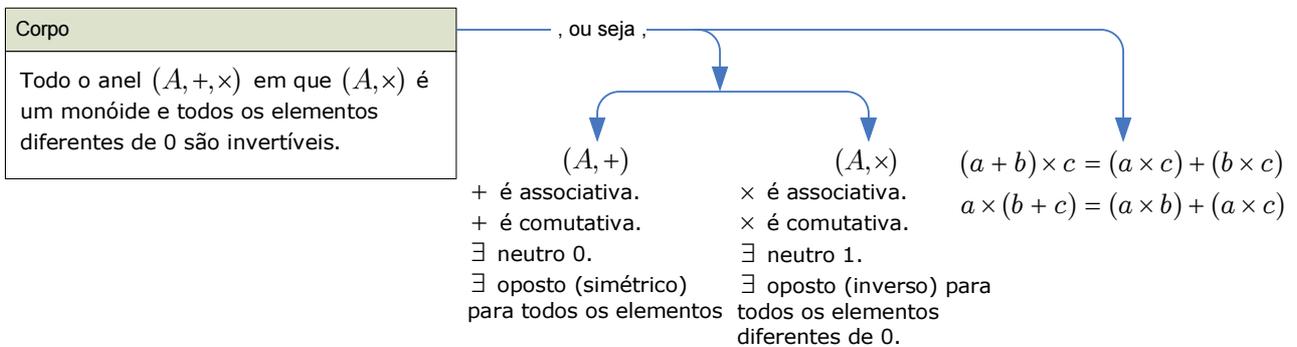
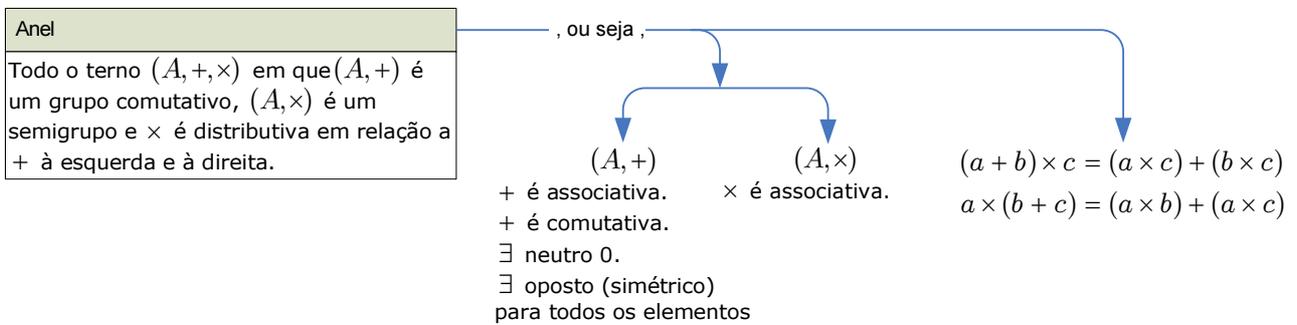
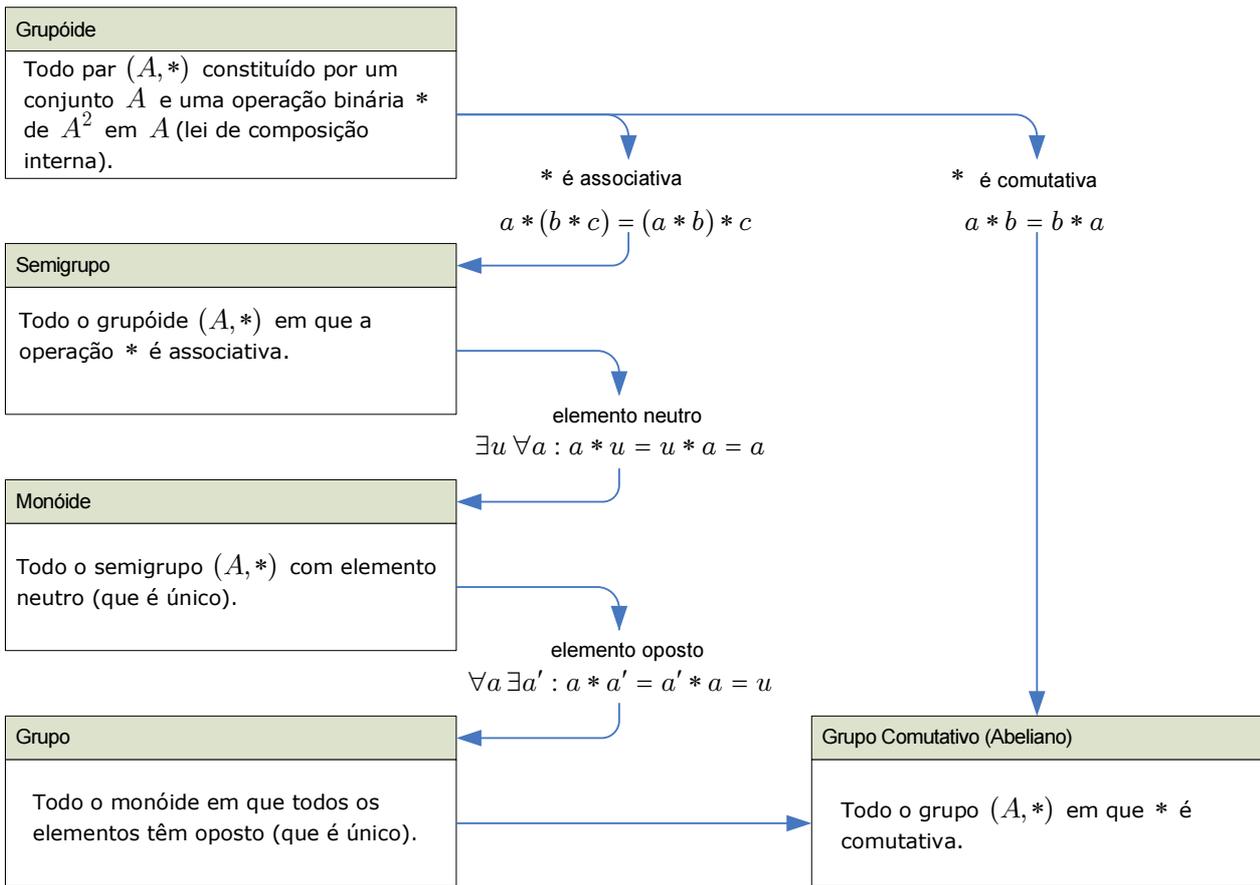
## 10. Espaços Vectoriais.

### 10.1. Estruturas Algébricas.

Na generalidade, uma estrutura algébrica é constituída por um ou mais conjuntos (suportes da estrutura), munidos de uma ou mais operações (leis de composição interna ou externa, operações unárias, etc.) envolvendo elementos daquele(s) conjuntos e satisfazendo certas propriedades formais.

Caso não exista ambiguidade, pode identificar-se um dos conjuntos suporte com a estrutura algébrica. Por exemplo, o corpo  $(\mathbb{R}, +, \times)$  refere-se, geralmente, apenas como o corpo  $\mathbb{R}$  (o corpo dos reais).

Algumas estruturas algébricas envolvem mais de um conjunto. Por exemplo, um espaço vectorial tem inerentes dois conjuntos: um conjunto de vectores e outro de escalares (um corpo), uma lei de composição interna (adição vectorial) e outra externa (multiplicação de escalar por vector).



## 10.2. Espaço Vectorial.

Seja  $\mathbb{E}$  um conjunto de elementos  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \dots, \mathbf{w}$ , chamados **vectores**, e  $\mathbb{K}$  um corpo, de elementos  $\alpha, \beta, \dots, \gamma$ , chamados **escalares**. Diz-se que  $\mathbb{E}$  é um **espaço vectorial** (ou **espaço linear**) sobre o corpo  $\mathbb{K}$  sse:

a. estiver definida em  $\mathbb{E}$  a operação *adição vectorial*,  $+$ , que a  $\mathbf{u} \in \mathbb{E}$  e a  $\mathbf{v} \in \mathbb{E}$  associa o elemento  $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathbb{E}$ , tal que  $(\mathbb{E}, +)$  é um grupo comutativo, ou seja,  $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{E}$ :

a1.  $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$  ( $+$  é associativa)

a2.  $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$  ( $+$  é comutativa)

a3.  $\exists_1 \mathbf{0} \in \mathbb{E} : (\mathbf{u} + \mathbf{0}) = \mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u}$  (elemento neutro de  $+$ , designado por *zero*)

a4.  $\forall \mathbf{u} \exists_1 -\mathbf{u} \in \mathbb{E} : \mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$  (elemento oposto de  $\mathbf{u}$  para a operação  $+$ , designado por *simétrico* de  $\mathbf{u}$ )

m. estiver definida a operação *multiplicação de escalar por vector*,  $\times$ , que a  $\alpha \in \mathbb{K}$  e a  $\mathbf{u} \in \mathbb{E}$  associa o elemento  $\alpha \times \mathbf{u} \in \mathbb{E}$  (ou, simplesmente  $\alpha \mathbf{u}$ ), que verifica:

m1.  $\alpha(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha \mathbf{u} + \alpha \mathbf{v}$  ( $\times$  é distributiva em relação à adição dos elementos de  $\mathbb{E}$ )

m2.  $(\alpha + \beta)\mathbf{u} = \alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{u}$  ( $\times$  é distributiva em relação à adição de elementos de  $\mathbb{K}$ )

m3.  $\alpha(\beta \mathbf{u}) = (\alpha\beta)\mathbf{u}$  (associatividade mista)

m4.  $1 \mathbf{u} = \mathbf{u}$  (elemento neutro de  $\times$  à esquerda)

A operação binária  $+$  de  $\mathbb{E}^2$  em  $\mathbb{E}$  designa-se por **adição vectorial**, e a operação binária  $\times$  de  $\mathbb{E} \times \mathbb{K}$  em  $\mathbb{E}$  designa-se por **multiplicação de escalar por vector**.

Saliente-se que um espaço vectorial é fechado relativamente à adição vectorial.

Quando  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  diz-se que  $\mathbb{E}$  é um espaço vectorial real, e quando  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  diz-se que  $\mathbb{E}$  é um espaço vectorial complexo.

### Exemplos

1. São exemplos de espaços vectoriais (ou seja, pode demonstrar-se que verificam as 8 propriedades acima enunciadas) os seguintes conjuntos, com a definição habitual de adição entre os seus elementos, e de multiplicação dos seus elementos por um escalar do corpo  $\mathbb{K}$  indicado:

- O conjunto  $\mathbb{R}^n$ , como temos vindo a considerar até aqui, com  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ .
- O conjunto dos segmento orientados, que apropriadamente designámos por vectores, com  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ .
- O conjunto  $\mathbb{C}^n$ , com  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  (e também com  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ).
- O conjunto das funções reais (ou complexas) de variável real num intervalo  $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$ , com as definições habituais de adição de funções e de multiplicação de uma função por uma constante  $\alpha \in \mathbb{R}$  (ou  $\alpha \in \mathbb{C}$ ):  $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$  e

$(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$ , com  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  (ou  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ). O vector nulo é a função  $f_0$  tal que  $f_0(x) = 0, \forall x \in \mathbb{I}$ .

É importante pensar em cada uma das funções como um vector, ou seja, simplesmente como um elemento do espaço vectorial. Para apenas duas funções podemos fazer a analogia com os segmentos orientados em  $\mathbb{R}^2$ .

Sendo um espaço vectorial constituído por funções, é designado por **espaço de funções**,  $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathbb{I})$ . Tem especial interesse, como verá nas cadeiras da especialidade, o **espaço de sinais** que é, exactamente, um espaço de funções que contém informação sobre um determinado fenómeno físico relevante para as aplicações

### 10.3. Combinação Linear.

Seja  $\mathbb{E}$  um espaço vectorial sobre um corpo  $\mathbb{K}$ . Diz-se que um vector  $\mathbf{u} \in \mathbb{E}$  é **combinação linear** dos vectores  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n \in \mathbb{E}$ , se existirem escalares  $k_1, k_2, \dots, k_n \in \mathbb{K}$ , designados por **coeficientes da combinação linear**, tais que

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= k_1 \mathbf{u}_1 + k_2 \mathbf{u}_2 + \dots + k_n \mathbf{u}_n \\ &= \sum_{i=1}^n k_i \mathbf{u}_i \end{aligned}$$

#### Exemplos

2. O vector de  $\mathbb{R}^4$ ,  $\mathbf{u} = (1, -2, -3, 4)$  é combinação linear dos vectores  $\mathbf{u}_1 = (2, 0, -1, 0)$ ,  $\mathbf{u}_2 = (-1, 2, 0, 0)$ ,  $\mathbf{u}_3 = (0, 0, -1, 2)$  e  $\mathbf{u}_4 = (2, 0, 0, -1)$ , dado que existem escalares,  $k_1 = 2, k_2 = -1, k_3 = 1, k_4 = -2$ , tais que

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^4 k_i \mathbf{u}_i$$

Com efeito

$$\begin{aligned} k_1 \mathbf{u}_1 + k_2 \mathbf{u}_2 + k_3 \mathbf{u}_3 + k_4 \mathbf{u}_4 &= 2\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3 - 2\mathbf{u}_4 \\ &= 2 \times (2, 0, -1, 0) - (-1, 2, 0, 0) + (0, 0, -1, 2) - 2(2, 0, 0, -1) \\ &= (4, 0, -2, 0) + (1, -2, 0, 0) + (0, 0, -1, 2) + (-4, 0, 0, 2) \\ &= (1, -2, -3, 4) \\ &= \mathbf{u} \end{aligned}$$

3. \*\* A função real de variável real  $f(x) = x + 2x^3$  pode ser descrita como combinação linear das funções (vectores)  $f_1(x) = 1$ ,  $f_2(x) = x$ ,  $f_3(x) = x^2$ , e  $f_4(x) = x^3$ :

$$f(x) = 0f_1(x) + 1f_2(x) + 0f_3(x) + 2f_4(x)$$

ou, simplesmente,

$$f(x) = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 2]$$

4. \*\* A função  $f(x) = e^{jx}$ , com  $x \in \mathbb{R}$ , é uma função complexa de variável real designada por **exponencial complexa**. A **fórmula de Euler** estabelece a relação entre a função exponencial complexa e as funções trigonométricas seno e co-seno :

$$e^{jx} = \cos(x) + j\text{sen}(x)$$

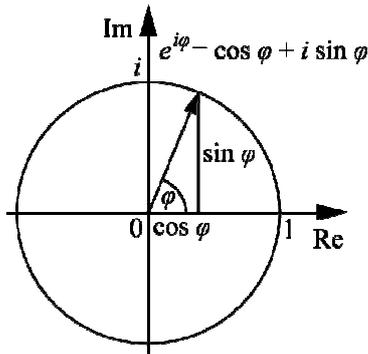


Figura 10.1

Nas expressões acima  $e$  é a base do logaritmo natural ( $e \approx 2.7183$ ) e assume-se que  $x$  é expresso em radianos e não em graus.

A função  $\cos(\omega_0 t)$  pode ser expressa como combinação linear das funções  $e^{j\omega_0 t}$  e  $e^{-j\omega_0 t}$

$$\cos(\omega_0 t) = 0.5e^{j\omega_0 t} + 0.5e^{-j\omega_0 t}$$

A função  $\cos(\omega_0 t)$  pode ser interpretada como um vector pertencente ao subespaço das funções contínuas (complexas de variável real) gerado pelos vectores  $e^{j\omega_0 t}$  e  $e^{-j\omega_0 t}$ , e, nesse subespaço, pode ser descrito apenas pelas suas coordenadas

$$\cos(\omega_0 t) = [0.5 \quad 0.5]$$

Também a função  $\sin(\omega_0 t)$  pode ser expressa como combinação linear das funções  $e^{j\omega_0 t}$  e  $e^{-j\omega_0 t}$

$$\begin{aligned} \sin(\omega_0 t) &= -0.5j e^{j\omega_0 t} + 0.5j e^{-j\omega_0 t} \\ &= [-0.5j \quad 0.5j] \end{aligned}$$

Note que, agora, o espaço vectorial é necessariamente definido sobre o corpo dos complexos e não sobre o corpo dos reais, uma vez que os escalares da combinação linear obtida são complexos.

### 10.4. Independência linear.

O conjunto de vectores  $\mathbb{V} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\} \subset \mathbb{E}$ , diz-se **linearmente independente** sse a equação

$$k_1 \mathbf{u}_1 + k_2 \mathbf{u}_2 + \dots + k_n \mathbf{u}_n = \mathbf{0}$$

só possui a solução trivial

$$k_1 = k_2 = \dots = k_n = 0$$

Ou, o que é equivalente, nenhum dos vectores pode ser expresso como combinação linear dos restantes.

Caso contrário, isto é, se a equação possui uma solução não trivial, dizemos que os vectores de  $\mathbb{V}$  são **linearmente dependentes**. Equivalentemente,  $\mathbb{V}$  é linearmente dependente sse um dos seus elementos é combinação linear dos restantes.

#### Exemplos

5. O conjunto de vectores  $\mathbb{V} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\}$ , com  $\mathbf{u}_1 = (2, 0, -1, 0)$ ,  $\mathbf{u}_2 = (-1, 2, 0, 0)$ ,  $\mathbf{u}_3 = (0, 0, -1, 2)$  e  $\mathbf{u}_4 = (2, 0, 0, -1)$ , é linearmente independente dado que

$$\begin{aligned}
 & k_1 \mathbf{u}_1 + k_2 \mathbf{u}_2 + k_3 \mathbf{u}_3 + k_4 \mathbf{u}_4 = \mathbf{0} \\
 & \Rightarrow k_1(2, 0, -1, 0) + k_2(-1, 2, 0, 0) + k_3(0, 0, -1, 2) + k_4(2, 0, 0, -1) = 0 \\
 & \Rightarrow (2k_1, 0, -k_1, 0) + (-k_2, 2k_2, 0, 0) + (0, 0, -k_3, 2k_3) + (2k_4, 0, 0, -k_4) = 0 \\
 & \Rightarrow (2k_1 - k_2 + 2k_4, 2k_2, -k_1 - k_3, 2k_3 - k_4) = 0 \\
 & \Rightarrow \begin{cases} 2k_1 - k_2 + 2k_4 = 0 \\ 2k_2 = 0 \\ -k_1 - k_3 = 0 \\ 2k_3 - k_4 = 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema podemos verificar que só existe a solução trivial  $k_1 = 0 \wedge k_2 = 0 \wedge k_3 = 0 \wedge k_4 = 0$ .

6. \*\* O conjunto de vectores  $\mathbb{V} = \{3x^2, 1 - x + 2x^2, 2 - 2x + x^2\} \subset \mathcal{P}_2$  é linearmente dependente, dado que

$$3x^2 = 2(1 - x + 2x^2) - (2 - 2x + x^2)$$

7. \*\* O conjunto de vectores  $\mathbb{V} = \{\text{sen}^2(x), \text{cos}^2(x), \text{cos}(2x)\}$  é linearmente dependente, dado que

$$\text{cos}(2x) = \text{cos}^2(x) - \text{sen}^2(x)$$

8. \*\* O conjunto de vectores  $\mathbb{P} = \{1, x, x^2, x^3\}$  é linearmente independente. Nenhum dos seus vectores pode exprimir-se como combinação linear dos outros.

9. \*\* O conjunto de vectores  $\mathbb{P} = \{1 + x, x + x^2, 1 + x^2\}$  é linearmente independente, uma vez que

$$k_1(1 + x) + k_2(x + x^2) + k_3(1 + x^2) = 0$$

implica que

$$\begin{aligned}
 k_1 + k_1x + k_2x + k_2x^2 + k_3 + k_3x^2 &= 0 \\
 (k_1 + k_3) + (k_1 + k_2)x + (k_2 + k_3)x^2 &= 0
 \end{aligned}$$

, ou seja

$$\begin{aligned}
 k_1 + k_3 &= 0 \\
 k_1 + k_2 &= 0 \\
 k_2 + k_3 &= 0
 \end{aligned}$$

, e ainda, na forma matricial,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

, pelo que, sendo

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

, o sistema só possui a solução trivial,  $k_1 = k_2 = k_3 = 0$ , pelo que os vectores  $1 + x$ ,  $x + x^2$ , e  $1 + x^2$ , são linearmente independentes.

**10.5. \*\* Wronskiano.**

Não existe nenhum método geral para demonstrar que um conjunto de  $n$  vectores de um espaço de funções é linearmente independente. No caso dos  $n$  vectores pertencerem a  $\mathcal{C}^{n-1}$  (o conjunto das funções  $n - 1$  vezes continuamente diferenciáveis), a independência linear pode ser demonstrada verificando que o determinante

$$W(x) = \det \begin{bmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{bmatrix}$$

, designado por **Wronskiano** dos  $n$  vectores, é não nulo pelo menos para um valor de  $x \in \mathbb{R}$ .

**Exemplos**

10. Para o conjunto de vectores  $\mathbb{V} = \{\text{sen}(x), \text{cos}(x), 1\}$  temos

$$\begin{aligned} W(x) &= \det \begin{bmatrix} \text{sen}(x) & \text{cos}(x) & 1 \\ \text{cos}(x) & -\text{sen}(x) & 0 \\ -\text{sen}(x) & -\text{cos}(2x) & 0 \end{bmatrix} \\ &= 1(-\text{cos}^2(x) - \text{sen}^2(x)) \\ &= -1 \end{aligned}$$

O determinante nunca é nulo (bastaria que fosse não nulo para apenas um valor de  $x$ ) pelo que  $\mathbb{V}$  é linearmente independente.

11. Para o conjunto de vectores  $\mathbb{P} = \{1 + x, x + x^2, 1 + x^2\}$ , temos

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} 1 + x & x + x^2 & 1 + x^2 \\ 1 & 1 + 2x & 2x \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} &= (1 + x)(2 + 4x - 4x) - (2x + 2x^2 - 2 - 2x^2) \\ &= 2 + 2x - 2x + 2 \\ &= 4 \end{aligned}$$

O determinante nunca é nulo (bastaria que não fosse nulo para apenas um valor de  $x$ ), pelo que os vectores são linearmente independentes.