

# AULA 13

- Note bem: a leitura destes apontamentos não dispensa de modo algum a leitura atenta da bibliografia principal da cadeira
- Chama-se a atenção para a importância do trabalho pessoal a realizar pelo aluno resolvendo os problemas apresentados na bibliografia, sem consulta prévia das soluções propostas, análise comparativa entre as suas resposta e a respostas propostas, e posterior exposição junto do docente de todas as dúvidas associadas.

## TÓPICOS

Exercícios.

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

## 13. Exercícios.

### DETERMINAR UMA BASE DE UM SUBESPAÇO.

**13.1.** Determinar uma base do subespaço de  $\mathbb{R}^4$

$$\mathbb{W} = L(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4) = \left\{ (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : (x - y + 2z = 0) \wedge (w - x - z = 0) \right\}$$

Uma vez que qualquer conjunto de  $k$  vectores linearmente independentes pertencentes a  $\mathbb{W}$  é uma base de  $\mathbb{W}$ , sendo  $k$  a dimensão do subespaço, a solução particular encontrada depende do método utilizado na sua determinação.

Dadas as restrições impostas, temos o sistemas de equações

$$\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ w - x - z = 0 \end{cases}$$

Fazendo

$$\begin{cases} y = x + 2z \\ w = x + z \end{cases}$$

, o que corresponde a considerar  $x$  e  $z$  como variáveis livres, e  $y$  e  $w$  como variáveis principais, resulta que os vectores  $\mathbf{u} = (x, y, z, w)$  pertencentes ao subespaço são da forma

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ x + 2z \\ z \\ x + z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ x \\ 0 \\ x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2z \\ z \\ z \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ou seja, são uma combinação linear dos vectores  $\mathbf{u}_1 = (1, 1, 0, 1)$  e  $\mathbf{u}_2 = (0, 2, 1, 1)$ . Dado que  $\mathbf{u}_1$  e  $\mathbf{u}_2$  são linearmente independentes fica assim determinada uma base de  $\mathbb{W}$ .

Se analisarmos formalmente o sistema

$$\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ w - x - z = 0 \end{cases}$$

, ou seja, na forma matricial

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



```
>> A=[1 -1 2 0;-1 0 -1 1];
>> B=[0 0]';
>> rref([A B])
ans =
```

```
1 0 1 -1 0
0 1 -1 -1 0
```

, concluímos que o sistema é possível e indeterminado, sendo  $x$  e  $y$  variáveis principais e  $z$  e  $w$  variáveis livres, as soluções do sistema são da forma

$$\begin{cases} x = w - z \\ y = w + z \end{cases}$$

ou seja

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w - z \\ w + z \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w \\ w \\ 0 \\ w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -z \\ z \\ z \\ 0 \end{bmatrix} = w \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

são portanto uma combinação linear dos vectores  $\mathbf{u}_1 = (1, 1, 0, 1)$  e  $\mathbf{u}_3 = (-1, 1, 1, 0)$ . Dado que  $\mathbf{u}_1$  e  $\mathbf{u}_3$  são linearmente independentes, fica assim determinada uma outra base de  $\mathbb{W}$ . Note-se que  $\mathbf{u}_3 = -\mathbf{u}_2$ . O subespaço  $\mathbb{W}$  tem dimensão 2; quaisquer 2 vectores linearmente independentes pertencentes  $\mathbb{W}$  são uma base de  $\mathbb{W}$ .

## REPRESENTAR UM VECTOR EM BASES DIFERENTES.

**13.2.** Vimos num exemplo anterior que, em  $\mathbb{R}^2$ , dadas a base canónica  $\mathcal{E} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$  e a base  $\mathcal{W} = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$ , com  $\mathbf{w}_1 = 3\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$  e  $\mathbf{w}_2 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$ , sendo conhecida a representação de  $\mathbf{v}$  na base  $\mathcal{W}$ ,  $\mathbf{v} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$ , podemos encontrar a representação de  $\mathbf{v}$  na base  $\mathcal{E}$

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{W}} \rightarrow [\mathbf{v}]_{\mathcal{E}}$$

, atendendo ao conceito de matriz de transição,

$$\begin{aligned} [\mathbf{v}]_{\mathcal{E}} &= M_{\mathcal{W}\mathcal{E}} [\mathbf{v}]_{\mathcal{W}} \\ &= \begin{bmatrix} [\mathbf{w}_1]_{\mathcal{E}} & [\mathbf{w}_2]_{\mathcal{E}} \end{bmatrix} [\mathbf{v}]_{\mathcal{W}} \\ &= \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

pelo que

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= [\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2] \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= 4\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \end{aligned}$$

Caso fosse conhecida a representação de  $\mathbf{v}$  na base  $\mathcal{E}$ ,  $\mathbf{v} = 4\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ , e se pretendesse encontrar a representação de  $\mathbf{v}$  na base  $\mathcal{W}$

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{E}} \rightarrow [\mathbf{v}]_{\mathcal{W}}$$

, deveríamos ter em atenção que

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{W}} = M_{\mathcal{W}\mathcal{E}}^{-1} [\mathbf{v}]_{\mathcal{E}}$$

logo

$$\begin{aligned} [\mathbf{v}]_{\mathcal{W}} &= \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0.2 & 0.2 \\ 0.4 & -0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ou seja  $\mathbf{v} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$ .

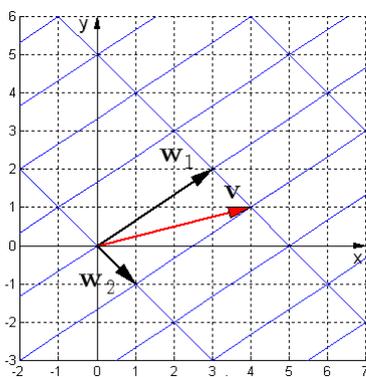


Figura 13.1

**13.3.** Em  $\mathbb{R}^2$ , consideremos a base canónica  $\mathcal{E} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ , a base  $\mathcal{U} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ , com  $\mathbf{u}_1 = -\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$  e  $\mathbf{u}_2 = 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$ , e o vector  $\mathbf{v} = 4\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ . Consideremos o problema de, sendo conhecida a representação de  $\mathbf{v}$  na base  $\mathcal{E}$ , encontrar a representação de  $\mathbf{v}$  na base  $\mathcal{U}$

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{E}} \rightarrow [\mathbf{v}]_{\mathcal{U}}$$

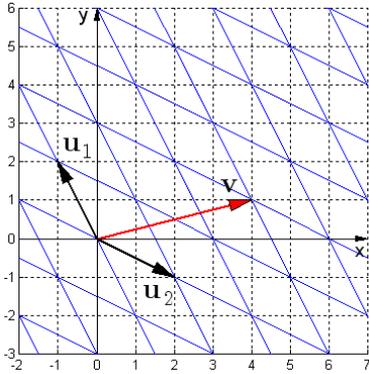


Figura 13.2

Sendo conhecida a matriz de transição da base  $\mathcal{U}$  para a base  $\mathcal{E}$

$$\begin{aligned} M_{\mathcal{U}\mathcal{E}} &= \begin{bmatrix} [u_1]_{\mathcal{E}} & [u_2]_{\mathcal{E}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

, e dado que

$$M_{\mathcal{E}\mathcal{U}} = M_{\mathcal{U}\mathcal{E}}^{-1}$$

temos

$$[v]_{\mathcal{U}} = M_{\mathcal{U}\mathcal{E}}^{-1} [v]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

, ou seja,  $\mathbf{v} = 2\mathbf{u}_1 + 3\mathbf{u}_2$ .

**13.4.** Em  $\mathbb{R}^2$ , consideremos a base  $\mathcal{U} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ , com  $\mathbf{u}_1 = -\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$  e  $\mathbf{u}_2 = 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$ , a base  $\mathcal{W} = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$ , com  $\mathbf{w}_1 = 3\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$  e  $\mathbf{w}_2 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$ , e  $\mathbf{v} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$ . Pretendemos encontrar a representação de  $\mathbf{v}$  na base  $\mathcal{U}$

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{W}} \rightarrow [\mathbf{v}]_{\mathcal{U}}$$

Com os dados do problema, é fácil determinar as matrizes de transição das base  $\mathcal{W}$  e  $\mathcal{U}$  para a base canónica

$$\begin{aligned} M_{\mathcal{W}\mathcal{E}} &= \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \\ M_{\mathcal{U}\mathcal{E}} &= \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Pelo que, considerando a representação intermédia de  $\mathbf{v}$  na base canónica

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{W}} \rightarrow [\mathbf{v}]_{\mathcal{E}} \rightarrow [\mathbf{v}]_{\mathcal{U}}$$

, sendo

$$[v]_{\mathcal{E}} = M_{\mathcal{W}\mathcal{E}} [v]_{\mathcal{W}}$$

e

$$[v]_{\mathcal{U}} = M_{\mathcal{E}\mathcal{U}} [v]_{\mathcal{E}} = M_{\mathcal{U}\mathcal{E}}^{-1} [v]_{\mathcal{E}}$$

resulta

$$\begin{aligned} [v]_{\mathcal{U}} &= M_{\mathcal{U}\mathcal{E}}^{-1} M_{\mathcal{W}\mathcal{E}} [v]_{\mathcal{W}} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

, ou seja,  $\mathbf{v} = 2\mathbf{u}_1 + 3\mathbf{u}_2$ .



```
>> u1=[-1 2]';
>> u2=[2 -1]';
>> w1=[3 2]';
>> w2=[1 -1]';
>> Mwe=[w1 w2];
>> Mue=[u1 u2];
>> vw=[1 1]';
>> vu=inv(Mue)*Mwe*vw
vu =
    2.0000
    3.0000
```

### \*\* INDEPENDÊNCIA LINEAR EM ESPAÇOS DE FUNÇÕES.

**13.5.** Verificar se  $p(x) = 3x^2$  pertence ao subespaço de  $\mathcal{P}_2$  gerado por  $q(x) = 1 - x + 2x^2$  e  $r(x) = 2 - 2x + x^2$ .

Trata-se de verificar se o vector  $p(x)$  pertence ao espaço gerado pelos vectores  $q(x)$  e  $r(x)$ , ou seja, verificar se existem escalares  $k_1$  e  $k_2$  tais que  $p(x) = k_1q(x) + k_2r(x)$ . Temos então

$$\begin{aligned} p(x) &= k_1q(x) + k_2r(x) \\ 3x^2 &= k_1(1 - x + 2x^2) + k_2(2 - 2x + x^2) \\ &= k_1 - k_1x + 2k_1x^2 + 2k_2 - 2k_2x + k_2x^2 \\ &= (k_1 + 2k_2) + (-k_1 - 2k_2)x + (2k_1 + k_2)x^2 \end{aligned}$$

, o que implica

$$\begin{cases} 0 = k_1 + 2k_2 \\ 0 = -k_1 - 2k_2 \\ 3 = 2k_1 + k_2 \end{cases}$$

, ou seja, na forma matricial

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

O sistema é possível e determinado

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

, sendo, portanto,  $k_1 = 2$  e  $k_2 = -1$ . Ou seja,  $p(x) = 2q(x) - 1r(x)$ .

**13.6.** Verificar se os vectores  $1$ ,  $e^x$ , e  $e^{2x}$  são linearmente independentes.

Recorrendo ao Wronskiano dos vectores, temos

$$\det \begin{bmatrix} 1 & e^x & e^{2x} \\ 0 & e^x & 2e^{2x} \\ 0 & e^x & 4e^{2x} \end{bmatrix} = 4e^{3x} - 2e^{3x} = 2e^{3x}$$

Dado que o determinante não é nulo para todo o  $x$ , os vectores são linearmente independentes.

---

### \*\* MUDANÇA DE BASE EM ESPAÇOS DE FUNÇÕES.

---

**13.7.** Escrever o vector  $1 + 2x - x^2$  na base  $\mathcal{P} = \{1 + x, x + x^2, 1 + x^2\}$ .

Temos

$$\begin{aligned} k_1(1 + x) + k_2(x + x^2) + k_3(1 + x^2) &= 1 + 2x - x^2 \\ k_1 + k_1x + k_2x + k_2x^2 + k_3 + k_3x^2 &= 1 + 2x - x^2 \\ (k_1 + k_3) + (k_1 + k_2)x + (k_2 + k_3)x^2 &= 1 + 2x - x^2 \end{aligned}$$

, o que implica

$$\begin{aligned} k_1 + k_3 &= 1 \\ k_1 + k_2 &= 2 \\ k_2 + k_3 &= -1 \end{aligned}$$

, ou seja, na forma matricial,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

e, dado que

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

temos

$$1 + 2x - x^2 = 2(1 + x) + 0(x + x^2) - 1(1 + x^2)$$

**13.8.** À semelhança de  $\mathbb{R}^n$  podemos analisar o problema anterior recorrendo ao conceito de matriz de mudança de base.

Considerando a base canónica de  $\mathcal{P}_2$ ,  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ , podemos escrever o vector  $p(x) = 1 + 2x - x^2$  na forma  $(1, 2, -1)_{\mathcal{B}}$ , isto é, explicitando apenas as coordenadas do vector na base canónica. Por outro lado, dado que conhecemos as coordenadas dos vectores da base  $\mathcal{P} = \{1 + x, x + x^2, 1 + x^2\}$  na base canónica,  $\mathcal{P} = \{(1, 1, 0)_{\mathcal{B}}, (0, 1, 1)_{\mathcal{B}}, (1, 0, 1)_{\mathcal{B}}\}$ , a escrita da matriz de mudança da base  $\mathcal{P}$  para a base  $\mathcal{B}$ ,  $M_{\mathcal{P}\mathcal{B}}$ , é imediata, dado ser a matriz cujas colunas correspondem às coordenadas dos vectores  $p_i$  na base  $\mathcal{B}$

$$\begin{aligned} M_{\mathcal{P}\mathcal{B}} &= \begin{bmatrix} [p_1]_{\mathcal{B}} & [p_2]_{\mathcal{B}} & [p_3]_{\mathcal{B}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Resulta então

$$\begin{aligned} [p(x)]_{\mathcal{P}} &= M_{\mathcal{B}\mathcal{P}} [p(x)]_{\mathcal{B}} \\ &= M_{\mathcal{P}\mathcal{B}}^{-1} [p(x)]_{\mathcal{B}} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

, tal como tínhamos calculado no exemplo anterior.

---

### MISCELÂNEA.

---

**13.9.** Para cada um dos conjuntos seguintes, averigue se são subespaços dos espaços vectoriais reais indicados.

a)  $\mathcal{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x - y = 3\} \subset \mathbb{R}^2$

b)  $\mathcal{B} = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x - y - 2z = 0 \wedge 2x + z - 2w = 0\} \subset \mathbb{R}^4$

a)  $\mathcal{A}$  não é um subespaço de  $\mathbb{R}^2$ . Basta verificar que  $(0, 0)$  não pertence ao conjunto, dado que não verifica a condição,  $2 \times 0 - 0 = 0 \neq 3$ .

O conjunto de pontos  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x - y = 3$  constitui uma recta que não passa na origem. Qualquer recta que não passe na origem não constitui um subespaço vectorial de  $\mathbb{R}^2$ .

b) Dadas as restrições impostas, temos o sistemas de equações

$$\begin{cases} x - y - 2z = 0 \\ 2x + z - 2w = 0 \end{cases}$$

Fazendo

$$\begin{cases} y = x - 2z \\ w = x + 1/2 z \end{cases}$$

, o que corresponde a considerar  $x$  e  $z$  como variáveis livres, e  $y$  e  $w$  como variáveis principais, resulta que os vectores  $\mathbf{u} = (x, y, z, w)$  pertencentes ao, eventual, subespaço são da forma

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ x - 2z \\ z \\ x + 1/2 z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ x \\ 0 \\ x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -2z \\ z \\ 1/2 z \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

Ou seja, constituem o subespaço resultante da combinação linear dos vectores de  $\mathbb{R}^4$ ,  $\mathbf{u}_1 = (1, 1, 0, 1)$  e  $\mathbf{u}_2 = (0, -2, 1, 1/2)$ .  $\mathcal{B}$  é um subespaço de  $\mathbb{R}^4$  de dimensão 2, constituindo  $\mathbf{u}_1$  e  $\mathbf{u}_2$  uma sua base.

**13.10.** Considere o subespaço de  $\mathbb{R}^4$  definido por

$$\mathbb{W} = \left\{ (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x - y - z - w = 0 \right\}$$

e o conjunto  $\mathcal{B} = \left\{ [1 \ 0 \ -1 \ -1]^T, [1 \ 0 \ 2 \ 0]^T, [1 \ 0 \ 0 \ 1]^T \right\}$  de vectores de  $\mathbb{R}^4$ , e seja ainda  $\mathbb{G} = L(\mathcal{B})$  o subespaço gerado por  $\mathcal{B}$ .

- Determine uma base e a dimensão de  $\mathbb{W}$ .
- Construa uma base de  $\mathbb{R}^4$  que contenha a base de  $\mathbb{W}$  que indicou em a).
- Diga, justificando, se os vectores  $\mathbf{u} = [2 \ 0 \ 3 \ -1]^T$  e  $\mathbf{v} = [1 \ 1 \ 1 \ 0]^T$  pertencem a  $\mathbb{W}$  e, em caso afirmativo, determine as suas coordenadas em relação à base de  $\mathbb{W}$  que indicou na alínea anterior.
- Porque razão não pode ser  $\mathcal{B}$  uma base de  $\mathbb{R}^4$ .
- Justifique se é  $\mathcal{B}$  linearmente independente.
- Indique uma base e a dimensão de  $\mathbb{G}$  e caracterize os vectores de  $\mathbb{G}$  por meio de uma condição nas suas coordenadas.
- Determine o subespaço  $\mathbb{H} = \mathbb{G} \cap \mathbb{W}$ , indicando uma base e a dimensão de  $\mathbb{H}$ .
- Será  $\mathbb{G} \cup \mathbb{W}$  um subespaço de  $\mathbb{R}^4$ ? Justifique a resposta.

a) Uma vez que qualquer conjunto de  $k$  vectores linearmente independentes pertencentes a  $\mathbb{W}$  é uma base de  $\mathbb{W}$ , sendo  $k$  a dimensão do subespaço, a solução particular encontrada depende do método utilizado na sua determinação.

Dado que apenas é imposta uma restrição podemos escolher quaisquer das 3 variáveis para variáveis livres. Por exemplo, fazendo:

$$\begin{aligned}x - y - z - w &= 0 \\x &= y + z + w\end{aligned}$$

, ou seja, escolhendo  $x$  como variável principal, resulta que os vectores  $\mathbf{u} = (x, y, z, w)$  pertencentes ao subespaço são da forma

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y + z + w \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ y \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z \\ 0 \\ z \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w \\ 0 \\ 0 \\ w \end{bmatrix} = y \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + w \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ou seja, são uma combinação linear dos vectores  $\mathbf{u}_1 = (1, 1, 0, 0)$ ,  $\mathbf{u}_2 = (1, 0, 1, 0)$  e  $\mathbf{u}_3 = (1, 0, 0, 1)$ . Dado que  $\mathbf{u}_1$ ,  $\mathbf{u}_2$  e  $\mathbf{u}_3$  são linearmente independentes,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

, fica assim determinada uma base de  $\mathbb{W}$  que é portanto um subespaço de  $\mathbb{R}^4$  de dimensão 3.

b) Basta juntar a  $\mathbf{u}_1$ ,  $\mathbf{u}_2$  e  $\mathbf{u}_3$  um vector da base canónica de  $\mathbb{R}^4$  que seja linearmente independente destes 3. Por exemplo,  $\mathbf{u}_4 = (0, 0, 1, 0)$ , é, como se pode ver por observação da matriz escalonada acima, que não tem pivot na 3ª coluna, linearmente independente de  $\mathbf{u}_1$ ,  $\mathbf{u}_2$  e  $\mathbf{u}_3$ , constituindo assim os 4 vectores uma base de  $\mathbb{R}^4$ .

c) Se os vectores  $\mathbf{u} = [2 \ 0 \ 3 \ -1]^T$  e  $\mathbf{v} = [1 \ 1 \ 1 \ 0]^T$  pertencem a  $\mathbb{W}$  podem ser escritos como combinação linear de uma sua base. Sendo a base constituída pelos vectores  $\mathbf{u}_1 = (1, 1, 0, 0)$ ,  $\mathbf{u}_2 = (1, 0, 1, 0)$  e  $\mathbf{u}_3 = (1, 0, 0, 1)$ , temos

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= x\mathbf{u}_1 + y\mathbf{u}_2 + z\mathbf{u}_3 \\ \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} &= x \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Escalonando a matriz completa do sistema, temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \dots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

O sistema é possível e determinado tendo como solução  $x = 0$ ,  $y = 3$  e  $z = -1$ .

Portanto  $\mathbf{u} = [2 \ 0 \ 3 \ -1]^T$  pertencem a  $\mathbb{W}$ ,  $\mathbf{u} = 0\mathbf{u}_1 + 3\mathbf{u}_2 - 1\mathbf{u}_3 = 3\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3$ , ou seja,  $\mathbf{u} = [0 \ 3 \ -1]_{\mathcal{U}}^T$ .

Procedendo de modo semelhante, temos para  $\mathbf{v} = [1 \ 1 \ 1 \ 0]^T$

$$\mathbf{v} = x\mathbf{u}_1 + y\mathbf{u}_2 + z\mathbf{u}_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Escalonando a matriz completa do sistema, temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \dots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

O sistema é impossível, pelo que  $\mathbf{v} \notin \mathbb{W}$ .

d)  $\mathcal{B}$  não pode ser uma base de  $\mathbb{R}^4$  dado que toda a base de  $\mathbb{R}^4$  é constituída por 4 vectores e  $\mathcal{B}$  é constituído apenas por 3 vectores.

e) Dispondo os vectores de  $\mathcal{B}$  sobre as linhas de uma matriz e procedendo ao seu escalonamento, temos:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \dots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

, pelo que  $\mathcal{B}$  é linear independente.

f) Sendo os 3 vectores de  $\mathcal{B}$  linearmente independentes constituem uma base do espaço  $\mathbb{G}$  por eles gerado que tem, portanto, dimensão 3. Podemos assim escolher para base de  $\mathbb{G}$  os vectores  $\mathbf{u}_1 = [1 \ 0 \ -1 \ -1]$ ,  $\mathbf{u}_2 = [1 \ 0 \ 2 \ 0]^T$  e  $\mathbf{u}_3 = [1 \ 0 \ 0 \ 1]^T$ .

Para caracterizar mais facilmente os vectores de  $\mathbb{G}$  por meio de uma condição nas suas coordenadas, podemos continuar o escalonamento da matriz  $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \dots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Assim, os vectores  $\mathbf{u} = (x, y, z, w) \in \mathbb{G}$  são tais que

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + k_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 \\ 0 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ z \\ w \end{bmatrix}$$

Ficando assim determinada a condição:

$$\mathbb{G} = \left\{ (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : y = 0 \right\}$$

Nota: O método de resolução acima é equivalente ao utilizado na aula 12. Teríamos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & x \\ 0 & 0 & 0 & y \\ -1 & 2 & 0 & z \\ -1 & 0 & 1 & w \end{bmatrix} \sim \dots \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & x \\ 0 & 3 & 1 & x+z \\ 0 & 0 & 5 & 2x-z+3w \\ 0 & 0 & 0 & y \end{bmatrix}$$

Para que o sistema seja possível, ou seja, qualquer vector de  $\mathbb{G}$  seja uma combinação linear de  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ , deverá ser  $y = 0$ , a mesma condição obtida acima.

g) O subespaço  $\mathbb{H} = \mathbb{G} \cap \mathbb{W}$ , tendo que verificar simultaneamente as condições a que cada um dos dois subespaço obedece é

$$\mathbb{H} = \left\{ (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x - y - z + w = 0 \wedge y = 0 \right\}$$

Temos então que todos os vectores  $\mathbf{u} = (x, y, z, w)$  pertencentes ao subespaço são da forma

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y + z + w \\ 0 \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z + w \\ 0 \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z \\ 0 \\ z \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w \\ 0 \\ 0 \\ w \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + w \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ou seja, são uma combinação linear dos vectores  $\mathbf{u}_1 = (1, 0, 1, 0)$  e  $\mathbf{u}_2 = (1, 0, 0, 1)$ . Dado que  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$  e  $\mathbf{u}_3$  são linearmente independentes, fica assim determinada uma base de  $\mathbb{H}$  que é portanto um subespaço de  $\mathbb{R}^4$  de dimensão 2.

h)  $\mathbb{G} \cup \mathbb{W}$  só seria um subespaço de  $\mathbb{R}^4$  se  $\mathbb{G} \subset \mathbb{W}$  ou  $\mathbb{G} \supset \mathbb{W}$ , o que, como podemos concluir dos resultados obtidos na alínea g), não se verifica. Assim sendo, o espaço resultante da reunião não é fechado relativamente à adição vectorial, como podemos comprovar facilmente. Por exemplo,  $\mathbf{u}_1 = (3, 1, 1, 1) \in \mathbb{W}$ , dado que  $x = y + z + w$ ,  $\mathbf{u}_2 = (1, 0, 2, 2) \in \mathbb{G}$ , dado que  $y = 0$ , e portanto  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in \mathbb{G} \cup \mathbb{W}$ , mas  $\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 = (4, 1, 3, 3) \notin \mathbb{G} \cup \mathbb{W}$ , dado que não verifica nenhuma das condições.

**13.11.** Seja  $\mathbb{W}$  um espaço vectorial real e  $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$  uma base de  $\mathbb{W}$ . Diga, justificando, se cada uma dos conjuntos seguintes gera  $\mathbb{W}$ .

$$\text{a) } \mathcal{C} = \{\mathbf{u}_1 + 2\mathbf{u}_2 - 3\mathbf{u}_3, \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_3\}$$

$$\text{b) } \mathcal{D} = \{2\mathbf{u}_1 - 3\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 - 2\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3\}$$

a)  $\mathbb{W}$  é um espaço de dimensão 3.  $\mathcal{C}$ , constituído por 3 vectores,  $\mathbf{c}_1 = \mathbf{u}_1 + 2\mathbf{u}_2 - 3\mathbf{u}_3$ ,  $\mathbf{c}_2 = \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3$  e  $\mathbf{c}_3 = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_3$ , poderá gerar  $\mathbb{W}$ , se os 3 vectores forem linearmente independentes, e, se assim for, por serem em número igual à dimensão do espaço,  $\mathbf{c}_1$ ,  $\mathbf{c}_2$  e  $\mathbf{c}_3$  para além de gerar  $\mathbb{W}$  constituem uma sua base.

Temos:

$$\mathbf{c}_1 = \mathbf{u}_1 + 2\mathbf{u}_2 - 3\mathbf{u}_3 = [1 \ 2 \ -3]_{\mathcal{B}}^T$$

$$\mathbf{c}_2 = \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3 = [0 \ 1 \ -1]_{\mathcal{B}}^T$$

$$\mathbf{c}_3 = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_3 = [1 \ 0 \ -1]_{\mathcal{B}}^T$$

Para verificar se os vectores são linearmente independentes basta dispo-los sobre as linhas de uma matriz e escaloná-la

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Os vectores  $\mathbf{c}_1$ ,  $\mathbf{c}_2$  e  $\mathbf{c}_3$  não são linearmente independentes,  $\mathbf{c}_3 = \mathbf{c}_1 - 2\mathbf{c}_2$ , logo não geram  $\mathbb{W}$ .

b) Procedendo de modo semelhante a a), temos

$$\mathbf{c}_1 = 2\mathbf{u}_1 - 3\mathbf{u}_2 = [2 \ -3 \ 0]_{\mathcal{B}}^T$$

$$\mathbf{c}_2 = \mathbf{u}_1 - 2\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3 = [1 \ -2 \ 1]_{\mathcal{B}}^T$$

$$\mathbf{c}_3 = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3 = [1 \ 1 \ -1]_{\mathcal{B}}^T$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Neste caso os vectores  $\mathbf{c}_1$ ,  $\mathbf{c}_2$  e  $\mathbf{c}_3$  são linearmente independentes, logo geram  $\mathbb{W}$  constituindo uma sua base.

O enunciado dá-nos os vectores  $\mathbf{c}$  escritos na base  $\mathcal{B}$ . Constituindo  $\mathcal{C}$  uma base de  $\mathbb{W}$  é imediato escrever a matriz de mudança de base da base  $\mathcal{C}$  para a base  $\mathcal{B}$ :

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = M_{\mathcal{CB}} [\mathbf{v}]_{\mathcal{C}}$$

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} [\mathbf{v}]_{\mathcal{C}}$$

Por exemplo, o vector  $\mathbf{c}_1$  escrito na base  $\mathcal{C}$  é

$$\mathbf{c}_1 = 1\mathbf{c}_1 + 0\mathbf{c}_2 + 0\mathbf{c}_3 = [1 \ 0 \ 0]_{\mathcal{C}}^T$$

, resultando na base  $\mathcal{B}$

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = M_{\mathcal{CB}} [\mathbf{v}]_{\mathcal{C}}$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{\mathcal{C}}$$

, ou seja,  $\mathbf{c}_1 = 2\mathbf{u}_1 - 3\mathbf{u}_2$ .

**13.12.** Sejam  $\mathbf{u}_1$ ,  $\mathbf{u}_2$ ,  $\mathbf{u}_3$  e  $\mathbf{u}_4$  vectores de um espaço vectorial real  $\mathbb{W}$  tais que

$$\mathbf{u}_1 \neq \mathbf{o} \wedge \mathbf{u}_1 - 2\mathbf{u}_2 = \mathbf{o} \wedge -\mathbf{u}_1 - 3\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3 = \mathbf{o} \wedge \mathbf{u}_4 \notin L(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$$

Indique, justificando, uma base e a dimensão do subespaço  $\mathbb{G} = L(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4) \subset \mathbb{W}$  gerado pelos quatro vectores.

O vector  $\mathbf{u}_2$  é linearmente dependente do vector  $\mathbf{u}_1$ :

$$\mathbf{u}_2 = \frac{1}{2} \mathbf{u}_1$$

, tal como o vector  $\mathbf{u}_3$ :

$$\mathbf{u}_3 = -\mathbf{u}_1 - 3\mathbf{u}_2 = -\mathbf{u}_1 - \frac{3}{2} \mathbf{u}_1 = -\frac{5}{2} \mathbf{u}_1$$

Todos eles geram o mesmo espaço, um espaço de dimensão 1. Dado que  $\mathbf{u}_4 \notin L(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ , logo é linearmente independente de  $\mathbf{u}_1$ , então  $\mathbb{G} = L(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4) = L(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_4)$ , ou seja,  $\mathbf{u}_1$  e  $\mathbf{u}_4$  constituem uma base de  $\mathbb{G}$  que é um espaço de dimensão 2.

**13.13.** Considere o subespaço de  $\mathbb{R}^3$  definido por

$$\mathbb{W} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -2x + y + z = 0\}$$

e o conjunto  $\mathcal{B} = \{[2 \ 0 \ 4]^T, [-1 \ 0 \ -2]^T\}$  de vectores de  $\mathbb{R}^3$ , e seja ainda  $\mathbb{G} = L(\mathcal{B})$  o subespaço gerado por  $\mathcal{B}$ .

- Determine uma base e a dimensão de  $\mathbb{W}$ .
- Diga, justificando, se os vectores  $\mathbf{u} = [3 \ 2 \ 4]^T$  e  $\mathbf{v} = [1 \ -1 \ 4]^T$  pertencem a  $\mathbb{W}$  e, em caso afirmativo, determine as suas coordenadas em relação à base de  $\mathbb{W}$  que indicou na alínea anterior.
- Construa uma base de  $\mathbb{R}^3$  que contenha a base de  $\mathbb{W}$  que indicou em a).
- Indique uma base e a dimensão de  $\mathbb{G}$  e caracterize os vectores de  $\mathbb{G}$  por meio de uma condição nas suas coordenadas.
- Será  $\mathbb{G} \cup \mathbb{W}$  um subespaço de  $\mathbb{R}^3$ ? Justifique a resposta.

a) Uma vez que qualquer conjunto de  $k$  vetores linearmente independentes pertencentes a  $\mathbb{W}$  é uma base de  $\mathbb{W}$ , sendo  $k$  a dimensão do subespaço, a solução particular encontrada depende do método utilizado na sua determinação.

Dado que apenas é imposta uma restrição podemos escolher quaisquer das 3 variáveis para variáveis livres. Por exemplo, fazendo:

$$\begin{aligned} -2x + y + z &= 0 \\ y &= 2x - z \end{aligned}$$

, ou seja, escolhendo  $y$  como variável principal, resulta que os vetores  $\mathbf{u} = (x, y, z)$  pertencentes ao subespaço são da forma

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 2x - z \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 2x \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -z \\ z \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ou seja, são uma combinação linear dos vetores  $\mathbf{u}_1 = (1, 2, 0)$ ,  $\mathbf{u}_2 = (0, -1, 1)$ . Dado que  $\mathbf{u}_1$  e  $\mathbf{u}_2$  são linearmente independentes,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

, fica assim determinada uma base de  $\mathbb{W}$  que é portanto um subespaço de  $\mathbb{R}^3$  de dimensão 2.

b) Se os vetores  $\mathbf{u} = [3 \ 2 \ 4]^T$  e  $\mathbf{v} = [1 \ -1 \ 4]^T$  pertencem a  $\mathbb{W}$  podem ser escritos como combinação linear de uma sua base. Sendo a base constituída pelos vetores  $\mathbf{u}_1 = (1, 2, 0)$ ,  $\mathbf{u}_2 = (0, -1, 1)$ , temos

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= x\mathbf{u}_1 + y\mathbf{u}_2 \\ \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} &= x \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Escalonando a matriz completa do sistema, temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \sim \dots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

O sistema é possível e determinado tendo como solução  $x = 3$  e  $y = 4$ . Portanto  $\mathbf{u} = [3 \ 2 \ 4]^T$  pertence a  $\mathbb{W}$ ,  $\mathbf{u} = 3\mathbf{u}_1 + 4\mathbf{u}_2$ , ou seja,  $\mathbf{u} = [3 \ 4]_{\mathcal{U}}^T$ .

Procedendo de modo semelhante, temos para  $\mathbf{v} = [1 \ -1 \ 4]^T$

$$\mathbf{v} = x\mathbf{u}_1 + y\mathbf{u}_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Escalonando a matriz completa do sistema, temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \sim \dots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

O sistema é impossível, pelo que  $\mathbf{v} \notin \mathbb{W}$ .

c) Basta juntar a  $\mathbf{u}_1$  e  $\mathbf{u}_2$  um vector da base canónica de  $\mathbb{R}^3$  que seja linearmente independente destes 2. Por exemplo,  $\mathbf{u}_3 = (0, 0, 1)$ , é, como se pode ver por observação da matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

acima, que não tem pivot na 3ª coluna, linearmente independente de  $\mathbf{u}_1$  e  $\mathbf{u}_2$ , constituindo assim os 3 vectores uma base de  $\mathbb{R}^3$ .

d) Dispondo os vectores de  $\mathcal{B}$  sobre as linhas de uma matriz e procedendo ao seu escalonamento, temos:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \sim \dots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

, pelo que  $\mathcal{B}$  não é linear independente. O vector  $\mathbf{u}_4 = (1, 0, 2)$  constitui uma base do espaço  $\mathbb{G}$  por eles gerado que tem, portanto, dimensão 1.

Vamos agora caracterizar os vectores de  $\mathbb{G}$  por meio de uma condição nas suas coordenadas. Temos que os vectores  $\mathbf{u} = (x, y, z) \in \mathbb{G}$  são tais que

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k \\ 0 \\ 2k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ 2x \end{bmatrix}$$

Ficando assim determinadas as condições:

$$\mathbb{G} = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 0 \wedge z = 2x \}$$

h)  $\mathbb{G} \cup \mathbb{W}$  só será um subespaço de  $\mathbb{R}^3$  se  $\mathbb{G} \subset \mathbb{W}$  ou  $\mathbb{G} \supset \mathbb{W}$ . Sendo

$$\mathbb{W} = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -2x + y + z = 0 \}$$

$$\mathbb{G} = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 0 \wedge z = 2x \}$$

temos que, para  $y = 0$ , a condição  $-2x + y + z = 0$  resulta em  $-2x + z = 0 \Leftrightarrow z = 2x$ , ou seja,  $\mathbb{G} \subset \mathbb{W}$ . Assim sendo,  $\mathbb{G} \cup \mathbb{W}$  é um subespaço de  $\mathbb{R}^3$

**13.14.** Em  $\mathbb{R}^3$ , considere as bases  $\mathcal{U} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ , com  $\mathbf{u}_1 = \mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{u}_2 = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$  e  $\mathbf{u}_3 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$  e  $\mathcal{W} = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$ , com  $\mathbf{w}_1 = -\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$ ,  $\mathbf{w}_2 = \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$  e  $\mathbf{w}_3 = 2\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_3$ . Sendo  $\mathbf{v} = -4\mathbf{w}_1 + 4\mathbf{w}_2 - \mathbf{w}_3$  determine a representação de  $\mathbf{v}$  na base  $\mathcal{U}$ .

Pretendemos encontrar a representação de  $\mathbf{v}$  na base  $\mathcal{U}$

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{W}} \rightarrow [\mathbf{v}]_{\mathcal{U}}$$

Com os dados do problema, é fácil determinar as matrizes de transição das bases  $\mathcal{W}$  e  $\mathcal{U}$  para a base canónica. Sendo  $\mathbf{w}_1 = -\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$ ,  $\mathbf{w}_2 = \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$  e  $\mathbf{w}_3 = 2\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_3$  temos

$$M_{\mathcal{W}\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Sendo  $\mathbf{u}_1 = \mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{u}_2 = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$  e  $\mathbf{u}_3 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$  temos

$$M_{\mathcal{U}\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Pelo que, considerando a representação intermédia de  $\mathbf{v}$  na base canónica

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{W}} \rightarrow [\mathbf{v}]_{\mathcal{E}} \rightarrow [\mathbf{v}]_{\mathcal{U}}$$

, sendo

$$[v]_{\mathcal{E}} = M_{\mathcal{W}\mathcal{E}} [v]_{\mathcal{W}}$$

e

$$[v]_{\mathcal{U}} = M_{\mathcal{E}\mathcal{U}} [v]_{\mathcal{E}} = M_{\mathcal{U}\mathcal{E}}^{-1} [v]_{\mathcal{E}}$$

resulta

$$[v]_{\mathcal{U}} = M_{\mathcal{U}\mathcal{E}}^{-1} M_{\mathcal{W}\mathcal{E}} [v]_{\mathcal{W}}$$

, ou ainda, multiplicando à esquerda por  $M_{\mathcal{U}\mathcal{E}}$ ,

$$M_{\mathcal{U}\mathcal{E}} [v]_{\mathcal{U}} = M_{\mathcal{W}\mathcal{E}} [v]_{\mathcal{W}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} [v]_{\mathcal{U}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Escalonando a matriz completa do sistema, resulta

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \sim \dots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Pelo que

$$[v]_{\mathcal{U}} = [4 \quad -2 \quad -2]_{\mathcal{U}}^T = 4\mathbf{u}_1 - 2\mathbf{u}_2 - 2\mathbf{u}_3$$