

AULA 19

- Note bem: a leitura destes apontamentos não dispensa de modo algum a leitura atenta da bibliografia principal da cadeira
- Chama-se a atenção para a importância do trabalho pessoal a realizar pelo aluno resolvendo os problemas apresentados na bibliografia, sem consulta prévia das soluções propostas, análise comparativa entre as suas resposta e a respostas propostas, e posterior exposição junto do docente de todas as dúvidas associadas.

TÓPICOS

Transformação linear.

Classificação de transformações lineares.

Matriz de uma transformação linear

Matriz de uma transformação linear e mudança de base.

Imagem e núcleo de uma transformação linear.

Operações com transformações lineares.

19. Transformações lineares.

19.1. Transformação linear.

1. Sejam \mathbb{E} e \mathbb{E}' espaços vectoriais sobre o corpo \mathbb{K} . Uma função $T : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}'$ é uma **transformação** (aplicação, função) **linear** se:

$$1. T(\alpha \mathbf{u}) = \alpha T(\mathbf{u})$$

$$2. T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$$

, ou, equivalentemente,

$$T(\alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v}) = \alpha T(\mathbf{u}) + \beta T(\mathbf{v})$$

, para quaisquer $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{E}$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

2. Resulta imediatamente da definição que

$$T(\mathbf{0}_{\mathbb{E}}) = \mathbf{0}_{\mathbb{E}'}$$

, ou seja, a imagem do vector nulo de \mathbb{E} é o vector nulo de \mathbb{E}' . Com efeito

$$T(\mathbf{0}_{\mathbb{E}}) = T(0 \mathbf{0}_{\mathbb{E}}) = 0 T(\mathbf{0}_{\mathbb{E}}) = \mathbf{0}_{\mathbb{E}'}$$

3. Sejam \mathbb{E} e \mathbb{E}' espaços vectoriais sobre o corpo \mathbb{K} , \mathbb{E} com dimensão finita, $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ uma base de \mathbb{E} , e $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ quaisquer n vectores de \mathbb{E}' . Então existe uma e só uma transformação linear $T : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}'$ tal que

$$T(\mathbf{e}_i) = \mathbf{u}_i \quad , \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$$

Quer isto dizer que uma aplicação linear cujo domínio é um espaço vectorial de dimensão finita fica perfeitamente definida quando se conhecem as imagens dos vectores de uma qualquer base desse domínio.

19.2. Classificação de transformações lineares.

Usam-se termos específicos para classificar as transformações lineares quanto à injectividade, sobrejectividade, etc.. Apresentam-se em seguida estes termos.

Sejam \mathbb{E} e \mathbb{E}' espaços vectoriais sobre o corpo \mathbb{K} e seja $T : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}'$ uma transformação linear.

1. T diz-se um **homomorfismo** de \mathbb{E} em \mathbb{E}' . (gr. homo: igual; morfo: forma).
2. Se $\mathbb{E}' = \mathbb{E}$, ou seja, $T : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$, T diz-se um **endomorfismo** em \mathbb{E} . (gr. endo: no interior de).
3. Se T é injectiva, T diz-se um **monomorfismo** de \mathbb{E} em \mathbb{E}' . (gr. mono: único).
4. Se T é sobrejectiva, T diz-se um **epimorfismo** de \mathbb{E} em \mathbb{E}' . (gr. epi: sobre).
5. Se T é bijectiva, T diz-se um **isomorfismo** de \mathbb{E} em \mathbb{E}' . (gr. iso: igual).
6. Se $\mathbb{E}' = \mathbb{E}$ e T é bijectiva, T diz-se um **automorfismo** em \mathbb{E} . (gr. auto: em si mesmo).

19.3. Matriz de uma transformação linear.

Sejam \mathbb{E} e \mathbb{E}' espaços vectoriais sobre o corpo \mathbb{K} , com dimensões n e m , respectivamente. Seja $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ uma base de \mathbb{E} e $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_m\}$ uma base de \mathbb{E}' . Tem-se que:

1. A qualquer transformação linear $T : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}'$ corresponde uma e uma só matriz \mathbf{A} do tipo $m \times n$, e vice-versa.
2. A matriz \mathbf{A} correspondente à transformação T , dita **matriz da transformação (relativa às bases escolhidas)**, tem por colunas as coordenadas dos transformados da base de \mathbb{E} na base de \mathbb{E}' . Ou seja, sendo

$$\begin{aligned} T(\mathbf{e}_1) &= a_{11}\mathbf{u}_1 + a_{21}\mathbf{u}_2 + \dots + a_{m1}\mathbf{u}_m \\ T(\mathbf{e}_2) &= a_{12}\mathbf{u}_1 + a_{22}\mathbf{u}_2 + \dots + a_{m2}\mathbf{u}_m \\ &\dots \\ T(\mathbf{e}_n) &= a_{1n}\mathbf{u}_1 + a_{2n}\mathbf{u}_2 + \dots + a_{mn}\mathbf{u}_m \end{aligned}$$

, temos

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

3. Sendo $\mathbf{y} = y_1\mathbf{u}_1 + y_2\mathbf{u}_2 + \dots + y_m\mathbf{u}_m$ o vector de \mathbb{E}' que é o transformado de um vector $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \dots + x_n\mathbf{e}_n$ de \mathbb{E} , $\mathbf{y} = T(\mathbf{x})$ equivale a $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \\ [\mathbf{x}]_{\mathbb{E}'} &= \left[[\mathbf{e}_1]_{\mathbb{E}'} \mid [\mathbf{e}_2]_{\mathbb{E}'} \mid \dots \mid [\mathbf{e}_n]_{\mathbb{E}'} \right] [\mathbf{x}]_{\mathbb{E}} \end{aligned}$$

4. Em particular, se $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é uma transformação linear, $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ a base canónica de \mathbb{R}^n e $\mathbf{u} = u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 + \dots + u_n\mathbf{e}_n \in \mathbb{R}^n$, então existe uma e uma só matriz real $\mathbf{A}_{m \times n}$ tal que

$$T(\mathbf{u}) = \mathbf{A}\mathbf{u}$$

\mathbf{A} é chamada **matriz** (canónica) **da transformação**

$$\mathbf{A} = [T(\mathbf{e}_1) \mid T(\mathbf{e}_2) \mid \dots \mid T(\mathbf{e}_n)]$$

, em que, $\forall k \in \{1, \dots, n\}$, $T(\mathbf{e}_k)$ é o vector coluna que resulta da calcular a imagem de \mathbf{e}_k por meio de T .

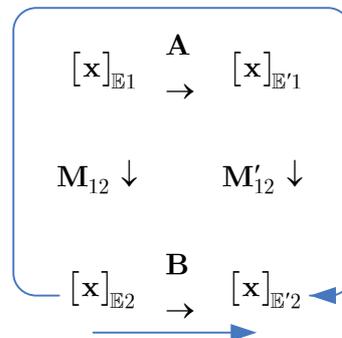
19.4. Matriz de uma transformação linear e mudança de base.

Sejam \mathbb{E} e \mathbb{E}' espaços vectoriais sobre o corpo \mathbb{K} e seja $T : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}'$ uma transformação linear. Interessa relacionar as matrizes \mathbf{A} e \mathbf{B} da transformação linear T em bases diferentes de \mathbb{E} e \mathbb{E}' .

Seja $[\mathbf{x}]_{\mathbb{E}'1}$ o vector de \mathbb{E}' o transformado de um vector $[\mathbf{x}]_{\mathbb{E}1}$ de \mathbb{E} em duas quaisquer bases de \mathbb{E} e \mathbb{E}' e \mathbf{A} a matriz da transformação relativa às bases escolhidas.

Seja $[\mathbf{x}]_{\mathbb{E}'2}$ o vector de \mathbb{E}' o transformado de um vector $[\mathbf{x}]_{\mathbb{E}2}$ de \mathbb{E} em quaisquer outras duas bases de \mathbb{E} e \mathbb{E}' e \mathbf{B} a matriz da transformação relativa às bases escolhidas.

Sejam \mathbf{M}_{12} e \mathbf{M}'_{12} as matrizes de mudança de base entre as duas bases escolhidas em \mathbb{E} e \mathbb{E}' , ou seja, $[\mathbf{x}]_{\mathbb{E}2} = \mathbf{M}_{12}[\mathbf{x}]_{\mathbb{E}1}$ e $[\mathbf{x}]_{\mathbb{E}'2} = \mathbf{M}'_{12}[\mathbf{x}]_{\mathbb{E}'1}$.



É imediato que (atenda ao esquema acima):

$$[\mathbf{x}]_{\mathbb{E}'2} = \mathbf{B}[\mathbf{x}]_{\mathbb{E}2}$$

$$[\mathbf{x}]_{\mathbb{E}'2} = \mathbf{M}'_{12}\mathbf{A}(\mathbf{M}_{12})^{-1}[\mathbf{x}]_{\mathbb{E}2}$$

logo

$$\mathbf{B} = \mathbf{M}'_{12}\mathbf{A}\mathbf{M}_{21}$$

19.5. Imagem e núcleo de uma transformação linear.

Sejam \mathbb{E} e \mathbb{E}' espaços vectoriais sobre o corpo \mathbb{K} , $T : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}'$ uma transformação linear e \mathbf{A} a matriz da transformação T relativa às bases escolhidas em \mathbb{E} e \mathbb{E}' .

1. Chama-se **imagem** de T , e representa-se por $\text{Im}(T)$, o contradomínio de T

$$\text{Im}(T) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{E}' : \mathbf{y} = T(\mathbf{x}) \wedge \mathbf{x} \in \mathbb{E}\}$$

2. Sendo $T : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}'$ uma transformação linear, $\text{Im}(T)$ é um subespaço de \mathbb{E}' .

3. À dimensão do espaço imagem chama-se **característica** da aplicação linear

$$\text{Car}(T) = \dim(\text{Im}(T))$$

4. A transformação T é sobrejectiva sse $\dim(\text{Im}(T)) = \dim(\mathbb{E}')$

5. $\text{Im}(T)$ é o espaço gerado pelos vectores que constituem as colunas de \mathbf{A} .

6. Sendo $\text{Car}(\mathbf{A})$ o número de colunas linearmente independentes de \mathbf{A} então

$$\dim(\text{Im}(T)) = \text{Car}(T) = \text{Car}(\mathbf{A})$$

7. Chama-se **núcleo** de T , e representa-se por $\text{Nuc}(T)$ ou $\text{Ker}(T)$, o conjunto de vectores de \mathbb{E} cuja imagem é o vector nulo de \mathbb{E}' ,

$$\text{Nuc}(T) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{E} : T(\mathbf{x}) = \mathbf{0}_{\mathbb{E}'}\}$$

8. Sendo $T : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}'$ uma transformação linear, $\text{Ker}(T)$ é um subespaço de \mathbb{E} .

9. À dimensão do núcleo de T chama-se **nulidade** da aplicação linear.

10. A transformação T é injectiva sse $\text{Nuc}(T) = \mathbf{0}_{\mathbb{E}}$.

11. $\text{Nuc}(T)$ é o conjunto de soluções do sistema homogéneo $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$, que é o núcleo da matriz \mathbf{A} , sendo

$$\dim(\text{Nuc}(T)) = \dim(\text{Nuc}(\mathbf{A}))$$

e igual ao grau de indeterminação do sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$.

12. A dimensão de \mathbb{E} é a soma das dimensões do núcleo e da imagem de T

$$\dim(\mathbb{E}) = \dim(\text{Nuc}(T)) + \dim(\text{Im}(T))$$

19.6. Operações com transformações lineares.

Sejam \mathbb{E} e \mathbb{E}' espaços vectoriais sobre o corpo \mathbb{K} , com dimensões n e m , respectivamente. Escolhidas uma base em \mathbb{E} e outra em \mathbb{E}' , sejam $T : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}'$ e $S : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}'$ aplicações lineares representadas pelas matrizes \mathbf{A}_T e \mathbf{A}_S , respectivamente. Seja $\alpha \in \mathbb{K}$.

Adição

Chama-se adição de T com S à transformação linear $T + S : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}'$ tal que

$$(T + S)(\mathbf{x}) = T(\mathbf{x}) + S(\mathbf{x}) \quad , \mathbf{x} \in \mathbb{E}$$

, sendo

$$\begin{aligned} T(\mathbf{x}) + S(\mathbf{x}) &= \mathbf{A}_T \mathbf{x} + \mathbf{A}_S \mathbf{x} \\ &= (\mathbf{A}_T + \mathbf{A}_S) \mathbf{x} \end{aligned}$$

Multiplicação por um escalar

Chama-se multiplicação do escalar α pela transformação T à transformação linear $\alpha T : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}'$ tal que

$$(\alpha T)(\mathbf{x}) = \alpha T(\mathbf{x}) \quad , \mathbf{x} \in \mathbb{E}$$

, sendo $\alpha T(\mathbf{x}) = \alpha \mathbf{A} \mathbf{x}$

Composição

1. Sejam \mathbb{E} , \mathbb{E}' e \mathbb{E}'' espaços vectoriais sobre o corpo \mathbb{K} de dimensões n , m e p , respectivamente. Escolhidas uma base em \mathbb{E} , uma base em \mathbb{E}' , e uma base em \mathbb{E}'' , sejam $T : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}'$ e $S : \mathbb{E}' \rightarrow \mathbb{E}''$ transformações lineares representadas pelas matrizes \mathbf{A}_T (de $m \times n$) e \mathbf{A}_S (de $p \times m$).

Chama-se **composta** de S com T , e escrevemos $S(T(\mathbf{x}))$ ou $(S \circ T)(\mathbf{x})$, à transformação linear $S \circ T : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}''$ tal que

$$(S \circ T)(\mathbf{x}) = S(T(\mathbf{x})) \quad , \mathbf{x} \in \mathbb{E}$$

, sendo $(S \circ T)(\mathbf{x}) = S(T(\mathbf{x})) = \mathbf{A}_S(\mathbf{A}_T \mathbf{x}) = (\mathbf{A}_S \mathbf{A}_T) \mathbf{x}$, ou seja, $S \circ T$ tem a matriz

$$\mathbf{A}_{S \circ T} = \mathbf{A}_S \mathbf{A}_T$$

2. Em particular, se $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ é uma transformação linear com matriz canónica \mathbf{A}_T e $S : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^m$ é outra transformação linear com matriz canónica \mathbf{A}_S , então $S \circ T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é linear e a sua matriz canónica é

$$\mathbf{A}_{S \circ T} = \mathbf{A}_S \mathbf{A}_T$$

Inversão

1. Se \mathbb{E} é um espaço vectorial sobre um corpo \mathbb{K} , a transformação $I_{\mathbb{E}} : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ tal que $I_{\mathbb{E}}(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$ é linear e designa-se por **identidade** em \mathbb{E} .

2. Duas transformações quaisquer $T : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}'$ e $S : \mathbb{E}' \rightarrow \mathbb{E}$ dizem-se **transformações inversas** uma da outra se $S \circ T = I_{\mathbb{E}}$ e $T \circ S = I_{\mathbb{E}'}$. Escrevemos $S = T^{-1}$ e $T = S^{-1}$ (uma vez que a inversa, quando existe é única) e dizemos que S e T são **invertíveis**. Escolhidas uma base em \mathbb{E} e outra em \mathbb{E}' , ambos espaços de dimensão n , sejam T e S representadas pelas matrizes quadradas de ordem n \mathbf{A}_T e \mathbf{A}_S , respectivamente. Tem-se $\mathbf{A}_S = \mathbf{A}_T^{-1}$ (ou $\mathbf{A}_T = \mathbf{A}_S^{-1}$), ou seja, a matriz da transformação inversa é igual à inversa da matriz da transformação.

3. Em particular, se $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma transformação linear invertível (um **isomorfismo**), com matriz canónica \mathbf{A}_T , então $T^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma transformação linear invertível com matriz canónica

$$\mathbf{A}_{T^{-1}} = \mathbf{A}_T^{-1}$$