

AULA 20

- Note bem: a leitura destes apontamentos não dispensa de modo algum a leitura atenta da bibliografia principal da cadeira
- Chama-se a atenção para a importância do trabalho pessoal a realizar pelo aluno resolvendo os problemas apresentados na bibliografia, sem consulta prévia das soluções propostas, análise comparativa entre as suas respostas e a respostas propostas, e posterior exposição junto do docente de todas as dúvidas associadas.

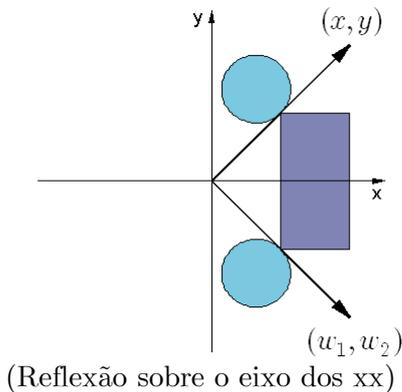
TÓPICOS

Transformações lineares elementares em \mathbb{R}^2 .

Transformações lineares elementares em \mathbb{R}^3 .

20. Transformações lineares elementares em \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3 .

20.1. Transformações lineares elementares em \mathbb{R}^2 .



1. Projectão ortogonal.

Projectão ortogonal sobre o eixo dos xx .

Equações

$$w_1 = x$$

$$w_2 = 0$$

Matriz de Transformação

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Projectão ortogonal sobre o eixo dos yy .

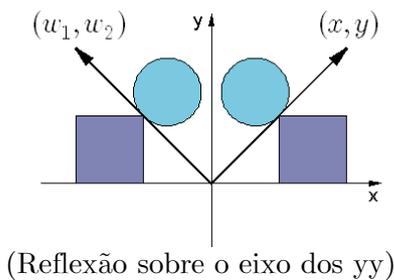
Equações

$$w_1 = 0$$

$$w_2 = y$$

Matriz de Transformação

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$



2. Reflexão.

Reflexão sobre o eixo dos xx .

Equações

$$w_1 = x$$

$$w_2 = -y$$

Matriz de Transformação

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Reflexão sobre o eixo dos yy (figura 25.4).

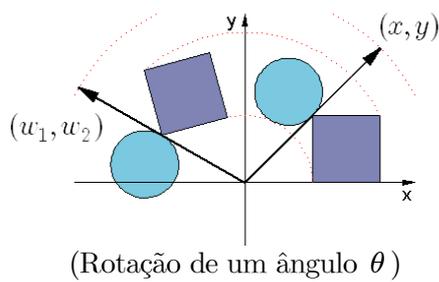
Equações

$$w_1 = -x$$

$$w_2 = y$$

Matriz de Transformação

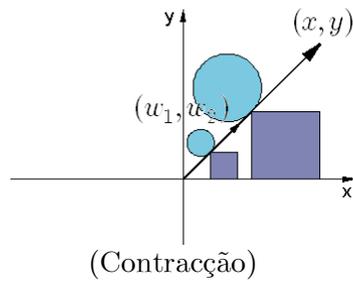
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$



3. Rotação (figura 25.5).

Rotação de um ângulo θ no sentido directo

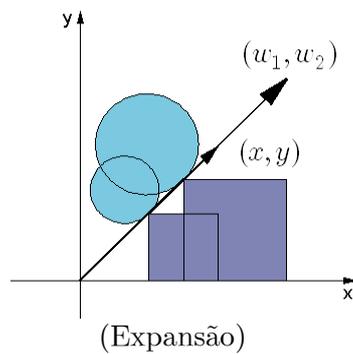
Equações	Matriz de Transformação
$w_1 = x \cos(\theta) - y \sin(\theta)$ $w_2 = x \sin(\theta) + y \cos(\theta)$	$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$



4. Contração (figura 25.6).

Contração de um factor k , $T(\mathbf{u}) = k\mathbf{u}$ ($0 \leq k < 1$).

Equações	Matriz de Transformação
$w_1 = kx$ $w_2 = ky$	$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$



5. Expansão (figura 25.7).

Expansão de um factor k , $T(\mathbf{u}) = k\mathbf{u}$ ($k > 1$).

Equações	Matriz de Transformação
$w_1 = kx$ $w_2 = ky$	$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$

20.2. Transformações lineares elementares em \mathbb{R}^3 .

1. Projecção ortogonal.

Projecção ortogonal sobre plano xy .

Equações

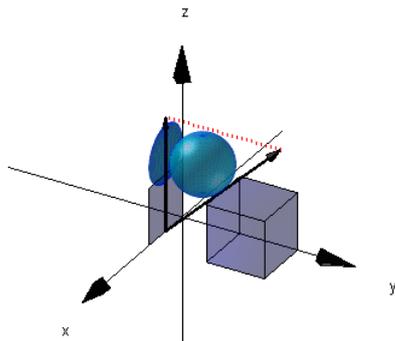
$$w_1 = x$$

$$w_2 = y$$

$$w_3 = 0$$

Matriz de Transformação

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



(Projecção ortogonal sobre o plano xz)

Projecção ortogonal sobre plano xz

Equações

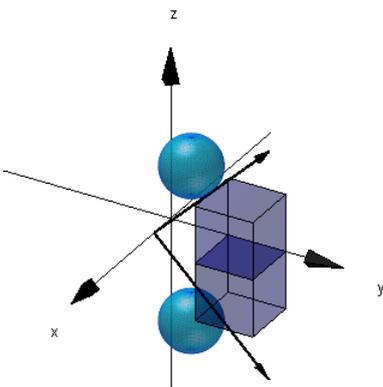
$$w_1 = x$$

$$w_2 = 0$$

$$w_3 = z$$

Matriz de Transformação

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



(Reflexão sobre o plano xy)

Projecção ortogonal sobre plano yz .

Equações

$$w_1 = 0$$

$$w_2 = y$$

$$w_3 = z$$

Matriz de Transformação

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Reflexão.

Reflexão sobre o plano xy .

Equações

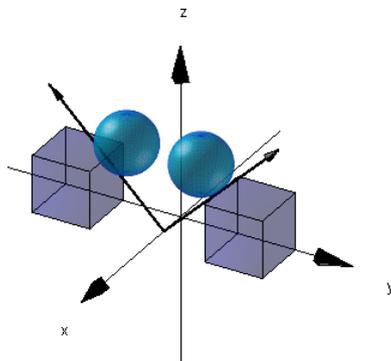
$$w_1 = x$$

$$w_2 = y$$

$$w_3 = -z$$

Matriz de Transformação

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$



(Reflexão sobre o plano xz)

Reflexão sobre o plano xz .

Equações

$$w_1 = x$$

$$w_2 = -y$$

$$w_3 = z$$

Matriz de Transformação

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Reflexão sobre o plano yz .

Equações

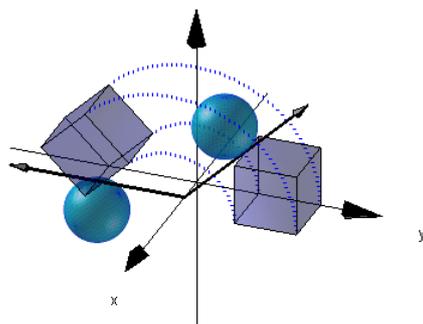
$$w_1 = -x$$

$$w_2 = y$$

$$w_3 = z$$

Matriz de Transformação

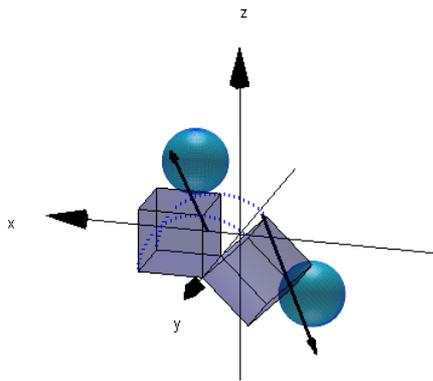
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



(Rotação sobre o eixo dos xx , $\theta = 3\pi/4$)

3. Rotação.

Rotação de um ângulo θ , no sentido directo, sobre o eixo dos **xx**.



Equações

$$\begin{aligned} w_1 &= x \\ w_2 &= y \cos(\theta) - z \sin(\theta) \\ w_3 &= y \sin(\theta) + z \cos(\theta) \end{aligned}$$

Matriz de Transformação

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

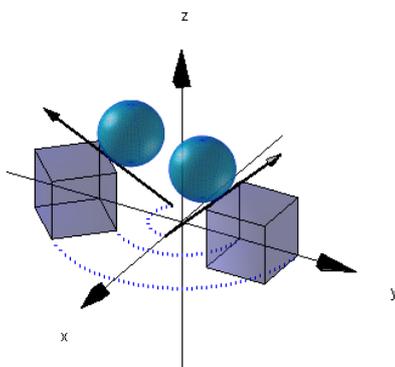
(Rotação sobre o eixo dos **yy**, $\theta = -\pi/4$)

Equações

$$\begin{aligned} w_1 &= x \cos(\theta) + z \sin(\theta) \\ w_2 &= y \\ w_3 &= -x \sin(\theta) + z \cos(\theta) \end{aligned}$$

Matriz de Transformação

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$



Rotação de um ângulo θ , no sentido directo, sobre o eixo dos **zz**.

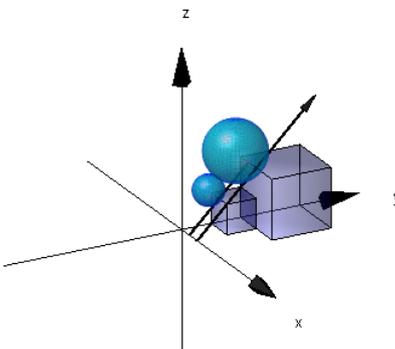
Equações

$$\begin{aligned} w_1 &= x \cos(\theta) - y \sin(\theta) \\ w_2 &= x \sin(\theta) + y \cos(\theta) \\ w_3 &= z \end{aligned}$$

Matriz de Transformação

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(Rotação sobre o eixo dos **zz**, $\theta = -3\pi/4$)



(Contração, $k = 0.5$)

4. Contração.

Contração de um factor k ($0 \leq k < 1$).

Equações

$$\begin{aligned} w_1 &= kx \\ w_2 &= ky \\ w_3 &= kz \end{aligned}$$

Matriz de Transformação

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$$

5. Expansão.

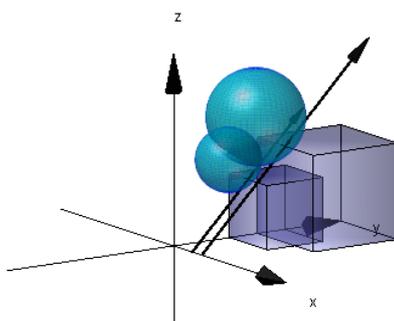
Expansão de um factor k ($k > 1$).

Equações

$$\begin{aligned} w_1 &= kx \\ w_2 &= ky \\ w_3 &= kz \end{aligned}$$

Matriz de Transformação

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$$



(Expansão, $\theta = 1.5$)

20.3. Isometria.

Observe-se que, seja em \mathbb{R}^2 ou em \mathbb{R}^3 , a **matriz de qualquer rotação ou qualquer reflexão é uma matriz ortogonal**, isto é, verifica a igualdade

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{I}_n$$

Resulta daí que, se T é uma rotação ou uma reflexão, em \mathbb{R}^2 ou em \mathbb{R}^3 , então T é uma **isometria** (uma transformação linear que conserva normas), isto é,

$$\forall \mathbf{u}, \quad \|T(\mathbf{u})\| = \|\mathbf{A}\mathbf{u}\| = \|\mathbf{u}\|$$

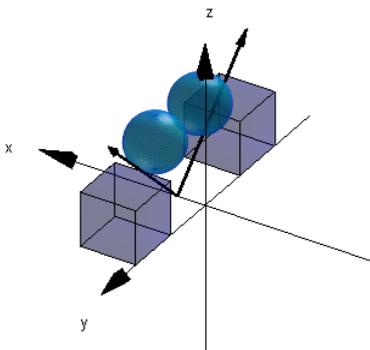
Com efeito,

$$\begin{aligned} \|T(\mathbf{u})\|^2 &= T(\mathbf{u}) \cdot T(\mathbf{u}) \\ &= (\mathbf{A}\mathbf{u})^T \mathbf{A}\mathbf{u} \\ &= (\mathbf{u}^T \mathbf{A}^T) \mathbf{A}\mathbf{u} \\ &= \mathbf{u}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{A}) \mathbf{u} \\ &= \mathbf{u}^T \mathbf{I}_n \mathbf{u} \\ &= \mathbf{u}^T \mathbf{u} \\ &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \\ &= \|\mathbf{u}\|^2 \end{aligned}$$

Já as contracções e as expansões (no plano e no espaço) são as vulgarmente designadas **homotetias de razão k** e, obviamente, não preservam normas.

Exemplos

1. Podemos verificar se uma transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ consistindo numa reflexão sobre o plano xz , seguida de uma rotação de $\theta = -\pi/2$ sobre o eixo dos zz é uma isometria

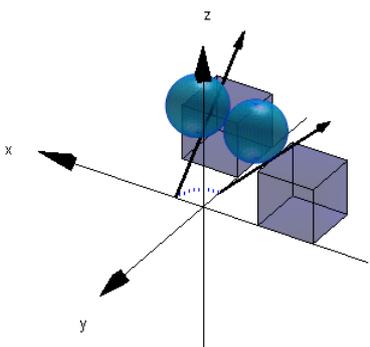


Sendo a matriz de uma reflexão sobre o plano xz

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

, e a matriz de uma rotação de $\theta = -\pi/2$ sobre o eixo dos zz

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_2 &= \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) & 0 \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$



A matriz da transformação $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A} &= \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1 \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Para verificar se a transformação linear é uma isometria vamos verificar se a matriz \mathbf{A} é ortogonal

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A} \mathbf{A}^T &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}_3
 \end{aligned}$$

, logo a transformação linear é uma isometria.



```

>> A1=[1 0 0;0 -1 0;0 0 1];
>> A2=[0 1 0;-1 0 0;0 0 1];
>> A=A2*A1;
>> A'*A
ans =
     1     0     0
     0     1     0
     0     0     1

```

20.4. Transformações afins. Translação.

Chamamos **transformação afim** de $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ a uma transformação da forma

$$S(\mathbf{u}) = T(\mathbf{u}) + \mathbf{k}$$

, em que T é uma transformação linear de $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^m$ é um vector constante. (Note bem: **uma transformação afim não é uma transformação linear.**)

Uma transformação afim $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ da forma

$$T(\mathbf{u}) = \mathbf{I}_n \mathbf{u} + \mathbf{k}$$

, em que $\mathbf{k} = [k_1, k_2, \dots, k_n]$ corresponde a uma **translação** de k_i unidades segundo cada um dos vectores \mathbf{e}_i da base canónica de \mathbb{R}^n .

Exemplos

2. A transformação afim $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$T(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

corresponde a uma translação de uma unidade segundo \mathbf{e}_1 e de 2 unidades segundo \mathbf{e}_2

3. A transformação afim $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$T(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

corresponde a uma reflexão sobre o eixo dos yy seguida de uma translação de 2 unidades segundo \mathbf{e}_2 .

Por exemplo, para o ponto $(2, 2)$ temos

$$\begin{aligned} T(\mathbf{u}) &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

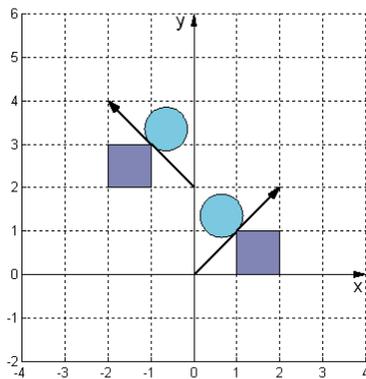


Figura 20.1