This item was submitted to Loughborough's Research Repository by the author.
Items in Figshare are protected by copyright, with all rights reserved, unless otherwise indicated.

Spatial distribution of electric field in a quantum superlattice with an injecting contact: exact solution

PLEASE CITE THE PUBLISHED VERSION

http://www.jetpletters.ac.ru/ps/2114/article_31760.shtml

PUBLISHER

Nauka Publishers

VERSION

AM (Accepted Manuscript)

PUBLISHER STATEMENT

This work is made available according to the conditions of the Creative Commons Attribution-NonCommercial-NoDerivatives 4.0 International (CC BY-NC-ND 4.0) licence. Full details of this licence are available at: https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/

LICENCE

CC BY-NC-ND 4.0

REPOSITORY RECORD

Maksimenko, V.A., V.V. Makarov, Alexey A. Koronovskii, Alexander E. Hramov, R. Venckevicius, G. Valusis, Alexander G. Balanov, F.V. Kusmartsev, and Kirill N. Alekseev. 2019. “Spatial Distribution of Electric Field in a Quantum Superlattice with an Injecting Contact: Exact Solution”. figshare. https://hdl.handle.net/2134/21224.

Распределение электрического поля в квантовой сверхрешётке с инжектирующим контактом: точное решение.

В. А. Максименко[+,*], *В. В. Макаров*[+], *А. А. Короновский*[*], *А. Е. Храмов*[+,*],

Р. Венкевичиюс[1)#], *Г. Валушис*[#], *А. Г. Баланов*[+,£], *Ф. В. Кусмарцев*[£], *К. Н. Алексеев*[2)£]

[+]*СГТУ им. Гагарина Ю.А., 410054 Саратов, Россия*

[*]*СГУ им. Н.Г. Чернышевского, 410012 Саратов, Россия*

[#]*Terahertz Photonics Laboratory, Center for Physical Sciences and Technology, Vilnius LT-01108, Lithuania*

[£]*Department of Physics, Loughborough University, Loughborough LE11 3TU, United Kingdom*

Рассматривается простейшая модель, описывающая стационарный электронный транспорт через квантовую сверхрешётку конечной длины при учёте произвольной электрической характеристики инжектирующего контакта. В рамках одноминизонного приближения получены точные формулы, описывающие пространственные распределения электрического поля в сверхрешётке для различных типов контактов, и найдены условия, при которых поле становится однородным. Получены аналитические выражения для вольт-амперных характеристик. В качестве одного из приложений развитой теории оценивается возможность достижения однородного поля в диодной структуре с естественной сверхрешёткой карбида кремния.

Стандартная математическая модель, описывающая пространственные распределения электрического поля $F(X)$ и объёмной плотности подвижного заряда $N(X)$ в одномерном твёрдотельном образце при инжекции электронов в него с контакта, включает уравнения Пуассона и непрерывности [1]

$$\frac{\partial F}{\partial X} = \frac{q}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}(N - N_D), \tag{1}$$

$$J = qNV_d(F), \tag{2}$$

а также условие для напряженности электрического поля на границе раздела между инжекционным контактом (эмиттером) и образцом: $F(X = 0) = F_e(J)$. Здесь $X \in [0, L]$ – координата внутри твёрдотельного образца, имеющего полную длину L, F_e – поле на контакте пренебрежимой длины, J – плотность тока через всю систему, включая контакт (J не зависит от X), $V_d(F)$ – дрейфовая скорость электронов, $N_D > 0$ – концентрация неподвижных зарядов, ε_r – относительная диэлектрическая проницаемость образца, ε_0 – электрическая постоянная и $q = -e$. В физику твёрдого тела эта простейшая модель была введена Моттом и Гёрни для описания влияния пространственного заряда на инжекцию электронов с идеального омического контакта ($F_e = 0$) в идеальный диэлектрик ($N_D = 0$), в случае, когда подвижность электронов предполагается постоянной ($V_d \propto F$) [2]. Прямое обобщение модели Мотта-Гёрни на случай диэлектриков с зависящей от поля дифференциальной подвижностью $\mu_d(F) > 0$ ($\mu_d = \partial V_d/\partial F$) широко используется в настоящее время для описания неоднородных распределений полей в приборах органической электроники [3]. Здесь типичным является монотонный рост поля от эмиттера к коллектору.

В полупроводниках, таких как GaAs и InP, μ_d может не только зависеть от поля, но и принимать отрицательные значения, что связяно с междолинным переносом электронов. Соответственно, пространственные распределения поля могут быть весьма сложными в связи с возможностью формирования статических зарядовых доменов [4]. Здесь важной, хотя во многом недооценённой, является статья Крёмера [5], которая была мотивирована моделированием эффекта Ганна в GaAs при произвольных граничных условиях. В рамках наиболее полного варианта модели (1)-(2) с $N_D \neq 0$ и $F_e \neq 0$ в этой работе показано, что могут существовать не только возрастающие, но также и убывающие и, при достаточно жёстких условиях, даже пространственно-однородные распределения поля.

Квантовая сверхрешётка представляет собой специальную твёрдотельную решётку, для которой, по крайней мере, в одном из направлений подвижность электронов является достаточно высокой, а соответствующий пространственный период существенно превышает типичные значения решёточных постоянных обычных кристаллов [6, 7]. Примесная проводимость такой наноструктуры вдоль направления сверхпериодичности (ось сверхрешётки) соответствует транспорту электронов, принадлежа-

[2)] R. Venckevičius and G. Valušis

[2)] e-mail: K.Alekseev2@lboro.ac.uk

щих одной или нескольким узким минизонам [6, 8]. Большинство используемых квантовых сверхрешёток традиционно представляют собой полупроводниковые гетероструктуры [6, 9], хотя несколько позже также началось систематическое изучение естественных сверхрешётк в политипах карбида кремния (SiC) [10]. Важно, что даже в умеренных электрических полях сверхрешётки способны демонстрировать отрицательную дифференциальную подвижность [6], вызванную возбуждением относительно долгоживущих Блоховских осцилляций в минизоне [11, 12]. С точки зрения приложений наибольший интерес, вероятно, представляет способность сверхрешёток усиливать и генерировать электромагнитные волны миллиметрового и субмиллиметрового диапазонов благодаря разнообразным физическим механизмам, которые включают в себя движущиеся зарядовые домены [13, 14], Блоховские осцилляции [15, 16], отрицательную эффективную массу электронов [17] и переходы между Ванье-Штарковскими лестницами [18]. Как правило, для эффективной реализации этих механизмов требуется достижение распределения поля, близкого к однородному. Необходимо также отметить, что в последние годы появились сверхрешёточные микроструктуры, в которых используются сложные, неомические контакты [19, 20, 21]. Всё это делает предсказание пространственного распределения поля в сверхрешёточных приборах актуальной проблемой.

В данной работе мы применяем подход Крёмера [5] для нахождения пространственных профилей поля в сверхрешётке с произвольным инжектирующим контактом. Мы показываем, что при учёте только одной зоны проводимости эта модель имеет точное аналитическое решение и приводим классификацию возможных пространственных распределений поля. Важным результатом нашего анализа является нахождение двух простых достаточных критериев реализации однородного поля как при положительной, так и при отрицательной дифференциальной подвижности электронов [формула (5)]. В обоих случаях необходимым условием является использование неомических контактов. В качестве важного приложения полученных результатов мы показываем, что условия, при которых недавно наблюдалась терагерцовая электролюминесценция в естественных сверхрешётках SiC [16, 20, 22] согласуются с нашим критерием однородного поля.

Следуя модели (1)-(2), рассмотрим пространственные распределения поля $F(X)$ в сверхрешётке, которую предполагаем однородно легированной примесями с объёмной концентрацией N_D. Зависимость дрейфовой скорости электронов вдоль оси сверхрешетки от поля определяется формулой Эсаки-Тсу [6]

$$V_d(F) = V_0 \frac{F/F_{cr}}{1 + (F/F_{cr})^2}, \tag{3}$$

где $F_{cr} = \hbar/ed\tau$ – критическое поле, соответствующее возникновению отрицательной дифференциальной подвижности, $V_0 = \Delta d/2\hbar$ – максимальноая минизонная скорость электронов, Δ – ширина минизоны, d – период сверхрешетки, τ –характерное время рассеяния. Для простоты здесь мы не рассматриваем температурные эффекты, которые легко могут быть учтены в окончательных выражениях соответствующей перенормировкой V_0 [7, 9].

Для дальнейшего рассмотрения удобно ввести безразмерные переменные (строчные буквы) для поля $f = F/F_{cr}$, тока $j = J/qN_DV_0$ и координаты $x = X/L$ ($x \in [0, 1]$). Очевидно, что при этом критическому полю и пиковому току Эсаки-Тсу в условиях электрической нейтральности ($N = N_D$) соответствуют безразмерные $f = 1$ и $j = 1/2$. Теперь, комбинируя уравнения (1), (2) и (3), получаем

$$\frac{df}{dx} = \alpha \left(\frac{j(1 + f^2)}{f} - 1 \right), \tag{4}$$

где $\alpha = qLN_D/F_{cr}\varepsilon_0\varepsilon_r$ есть безразмерный NL-параметр. Дифференциальное уравнение (4) имеет две неподвижные точки

$$f_\pm = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4j^2}}{2j}, \tag{5}$$

соответствующие двум значениям напряжённостей пространственно-однородных полей $f(x) = f_-$ и $f(x) = f_+$, которые, в принципе, могут быть реализованы в сверхрешётке. Как видно из (5), положение обоих точек определяется только током через структуру. Эти зависимости проиллюстрированы на рисунке 1*a*. Легко видеть, что точки $f_\pm$ существуют только при условии, что полный ток меньше, чем пиковый ток Эсаки-Тсу, $j \leq 0.5$. Кроме того, $\mu_d(F_-) > 0$ и $\mu_d(F_+) < 0$, т.е. поля f_- и f_+ принадлежат, соответственно, областям положительной и отрицательной дифференциальной подвижности.

Более полную информацию о распределении поля можно получить, проинтегрировав уравнение (4) с граничным условием $f(0) = f_e$, задающим напряженность электрического поля на эмиттере структуры. Получаем следующие формулы (детали вывода описаны в [32])

$$x_1(f) = \frac{1}{2\alpha j}\left[\frac{1}{\sqrt{1-4j^2}}\ln\left(\frac{(1+\sqrt{1-4j^2}-2jf)(1-\sqrt{1-4j^2}-2jf_e)}{(1-\sqrt{1-4j^2}-2jf)(1+\sqrt{1-4j^2}-2jf_e)}\right)+\ln\left(\frac{j-f+jf^2}{j-f_e+jf_e^2}\right)\right], \quad (6)$$

$$x_2(f) = \frac{1}{\alpha j\sqrt{4j^2-1}}\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{2jf-1}{\sqrt{4j^2-1}}\right)-\operatorname{arctg}\left(\frac{2jf_e-1}{\sqrt{4j^2-1}}\right)\right]+\frac{1}{2\alpha j}\ln\left(\frac{j-f+jf^2}{j-f_e+jf_e^2}\right), \quad (7)$$

где выражения $x_1(f)$ и $x_2(f)$ следует использовать при $j < 1/2$ и $j > 1/2$, соответственно. Когда же ток достигает пикового значения, $j \to 0.5$, обе эти формулы дают одинаковый результат [32]. Отметим также, что при помощи (5) выражение для $x_1(f)$ может быть переписано в компактной и симметричной форме

$$x_1(f) = \frac{(f_+ + f_-)}{\alpha(f_+ - f_-)} \times \left[f_+ \ln\left(\frac{f_+ - f}{f_+ - f_e}\right) - f_- \ln\left(\frac{f_- - f}{f_- - f_e}\right)\right], \quad (8)$$

подчёркивающей ту важную роль, которую играют точки $f_\pm$ в определении пространственной зависимости поля при $j < 1/2$.

Пространственные зависимости электрического поля $f(x)$, построенные при помощи полученных точных решений для различных значений поля на эмиттере $f_e = f(0)$ и трёх характерных значений тока j, представлены на рис. 1 *b*, *c*, *d*. В данном случае мы выбрали параметры $d = 8.3$ нм, $\Delta = 19.1$ мЭв, $L = 115$ нм, $N_D = 3 \times 10^{16}\,\mathrm{cm}^{-3}$ и $\tau = 250$ фс, соответствующие GaAs/AlGaAs сверхрешётке из экспериментальной работы [23].

Из рисунка видно, что при $j < 1/2$, в зависимости от значения f_e, в сверхрешетке возможна реализация трех типов пространственных профилей поля, которые мы будем помечать римскими цифрами.

Первый тип пространственных распределений (I) реализуется при $f_e < f_-$. Здесь напряженность поля быстро возрастает с увеличением пространственной координаты и достигая величины f_-, далее остается постоянной. Отметим, что при малых значениях тока j поле является практически однородным на большей части длины сверхрешетки (рис. 1*b*).

При $f_- < f_e < f_+$ в сверхрешетке реализуются распределения второго типа (II), характеризующееся убыванием напряженности электрического поля с увеличением координаты. Когда сила тока приближается к пиковому току Эсаки-Тсу, точки f_- и f_+ сближаются, при этом интервал значений f_e, поддерживающий распределения типа II, сужается (ср. рис. *b* и *c*). Важно, что в этом случае напряжённость полей второго типа убывает с ростом координаты достаточно медленно.

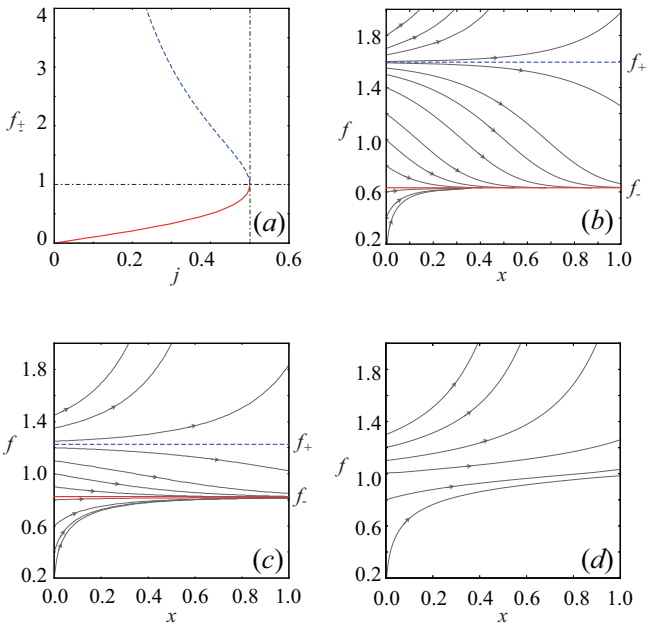

Рис.1. – (*a*) Зависимости значений f_- (красная сплошная линия) и f_+ (синяя штриховая линия) от тока j согласно уравнению (5). – (*b*) Пространственные распределения поля $f(x)$ при различных значениях напряженности поля на эмиттере $f_e = f(0)$ и при силе тока $j = 0.45$. – (*c*) То же, но при $j = 0.49$. – (*d*) То же, но при $j = 0.505$.

Третий тип пространственного распределения (III) осуществляется при $f_e > f_+$. Здесь для большинства значений f_e напряженность поля быстро возрастает с увеличением координаты и может достигать достаточно больших значений на коллекторе структуры. Для получения распределения поля, близкого к однородному, необходимо, чтобы соответствующая величина f_e была очень близка к f_+.

Наконец, когда ток достигает величины пикового ($j = 1/2$), состояния $f_\pm$ сливаются и исчезают, что соответствует седло-узловой бифуркации. Распределения поля, реализующиеся при $j > \frac{1}{2}$, показаны на рис. 1*d*. Теперь напряженность поля монотонно возрастает на всей длине системы. В соответствии с описанным ранее поведением, этот рост является наи-

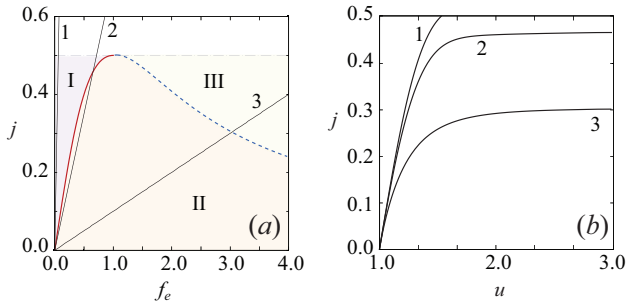

Рис. 2. – (a) Области параметров на плоскости $(f_e, j|j \leq \frac{1}{2})$, соответствующие трём типам пространственного распределения поля (I, II, III), а также кривая Эсаки-Тсу (комбинация красной сплошной и синей штриховой линий) и линейные характеристики эмиттеров с безразмерными проводимостями $s = 17$ (прямая 1), $s = 0.7$ (прямая 2) и $s = 0.1$ (прямая 3). – (b) Вольт-амперные характеристики $j(u)$ сверхрешётки, соответствующие тем же трём контактным характеристикам (1,2,3).

более медленным при выборе напряженности поля на эмиттере около критического поля сверхрешётки $f_e = 1$, что объясняется близостью к точке бифуркации.

До сих пор мы рассматривали поле на эмиттере f_e и ток j как два независимых параметра в нашей модели. Однако, более типичным является граничное условие, определяющее зависимость f_e от тока согласно некоторой электрической характеристике контакта $j = j_{\rm em}(f_e)$ [5]. В качестве примера такой характеристики мы рассмотрим линейную зависимость $j = sf_e$, где s – безразмерная проводимость эмиттера. Такая модельная зависимость является, с одной стороны, удобной для описания перехода от идеального омического ($s \gg 1$) к блокирующему ($s \ll 1$) типу контактов [24]. С другой стороны, подобные линейные характеристики описывают не только контакты, подчиняющиеся закону Ома, но и другие типы контактов [25].

На рисунке 2a показаны три типичные контактные характеристики (прямые 1,2,3) и кривая Эсаки-Тсу, которая в использованных переменных есть V_d/V_0, см. (3). Эта кривая может рассматриваться как комбинация f_-–линии и f_+–линии (ср. с рис. 1a). Поэтому каждая точка пересечения кривой с прямой, $f_e(j) = f_\pm(j)$, соответствует тем единственным значениям напряжённости поля $f(x) = f_e$ и силы тока, которые при заданном параметре s определяют пространственно-однородное решение. Далее, области I, II, III на плоскости (f_e, j) соответствуют граничным условиям, при которых в сверхрешетке реализуются три ранее описанных типа распределений поля. Из рисунка видно, что описывающая омический контакт прямая 1 лежит в области I, и поэтому она не может пересекаться с f_+-кривой. Это является иллюстрацией невозможности достижения однородного поля в условиях отрицательной дифференциальной подвижности при использовании чисто омического контакта. Прямая 2 ($j < 0.5$) лежит по большей части в области II в окрестности f_--линии и пересекает её при $j \approx 0.47$. Здесь возможна реализация распределений как типа I, так и типа II. Прямая 3, соответствующая контакту с малой проводимостью, пересекает f_+-линию при $j \approx 0.3$. При этом $f_e > 1$, что соответствует условию отрицательной дифференциальной подвижности $\mu_d < 0$. Однородные состояния такого типа, которые могут существовать в различных квантовых сверхрешётках, представляют наибольший физический интерес.

В экспериментах [16, 20, 22] наблюдалась терагерцовая электролюминесценция из диодной 6H-SiC-микроструктуры, которую авторы связывают с возбуждением Блоховских осцилляций в этой естественной сверхрешётке. В наших обозначениях такой режим соответствует $f = \omega_B\tau > 1$, где $\omega_B = \frac{qdF}{\hbar}$ – частота Блоха [6]. Интенсивное излучение наблюдалось при токе $I = 210$ мА. Для параметров сверхрешётки $d = 0.75$ нм, $\Delta = 260$ мЭв, $N_D = 10^{16}$ см$^{-3}$, площади поперечного сечения $S = 3 \times 10^{-5}$ см^2 [16, 20] и $\tau = 3 \times 10^{-13}$ с [26], мы имеем $j = 0.3 < \frac{1}{2}$ ($j \equiv I/qN_DV_0S$) и затем, используя (5), получаем $f_+ = 3$ или $F_+ = 87$ кВ/см. Эта величина близка к оценке поля генерации $F_{rad} = 84$ кВ/см, полученной в [16] непосредственно из анализа экспериментальных данных. Другим важным обстоятельством является то, что в этой структуре инжекционный контакт является неомическим, с нелинейностью характеристики, обусловленной пробоем примесных центров. Поэтому, несмотря на существенную погрешность в определении значений F_{cr} и F_{rad}, можно с достаточной уверенностью связать наблюдаемую генерацию ТГц излучения [16, 20, 22] с переходом SiC-сверхрешётки в пространственно-однородное состояние.

В рамках рассматриваемой модели возможно также найти зависимость падения напряжения на сверхрешетке $U = \int_0^L F(x)dx$ от тока J. Введём безразмерные переменные $u = U/F_{cr}L$ и $f_c = F(L)/F_{cr}$, где $F(L)$ – напряжённость поля на коллекторе структуры. Интегрируя по частям, мы получаем [32]

$$u_1(j) = \frac{2(f_c - f_e) + \alpha}{2\alpha j} - \frac{1}{4\alpha j^2}\left[2\sqrt{1-4j^2}\,\mathrm{arth}\left(\frac{(f_c - f_e)\sqrt{1-4j^2}}{f_c + f_e - 2j(1 + f_c f_e)}\right) + \ln\left(\frac{j - f_e + jf_e^2}{j - f_c + jf_c^2}\right)\right], \tag{9}$$

$$u_2(j) = \frac{f_c - f_e + \alpha}{\alpha j} - \frac{2}{\alpha\sqrt{4j^2-1}}\left[\mathrm{arctg}\left(\frac{2jf_c - 1}{\sqrt{4j^2-1}}\right) - \mathrm{arctg}\left(\frac{2jf_e - 1}{\sqrt{4j^2-1}}\right)\right], \tag{10}$$

при $j < 1/2$ и $j > 1/2$, соответственно. В свою очередь, значения f_c находятся как решения уравнений $x_{1,2}(f_c) = 1$, где $x_{1,2}(f)$ определены в (6) и (7). Присутствие в (9) и (10) поля на коллекторе f_c создаёт некоторые неудобства в использовании этих формул. Однако, такая зависимость является неизбежной для моделей, которые включают в себя рассмотрение пространственно-неоднородных электрических полей [27, 28]. На рисунке 2*b* представлены $j(u)$-зависимости, рассчитанные с использованием формулы (9) для параметров сверхрешётки [23]. Вольт-амперные характеристики такой формы являются типичными для различных минизонных сверхрешёток, в которых отсутствуют движущиеся зарядовые домены [19, 20, 29].

Таким образом, в данной работе в рамках хорошо апробированной модели мы получили аналитические результаты, которые могут применяться для моделирования пространственных распределений электрического поля и нахождения вольт-амперных характеристик широкого класса сверхрешёточных приборов. С точки зрения приложений [30, 31], представляет несомненный интерес обобщение этих результатов на случай сверхрешётки помещённой в магнитное поле.

Выражаем благодарность L. Subačius, T. Hyart, A. Lisauskas и M. C. Кагану за полезные обсуждения, а также H. Roskos за постоянный интерес и поддержку этой деятельности. Эта работа поддержана Российским научным Фондом (проект № 14-12-00222). А.Г.Б. благодарит за поддержку EPSRC (грант EP/M016099/1)

Список литературы

1. М. Ламперт и П. Марк, *Инжекционные токи в твёрдых телах* (Мир, Москва, 1973) [Пер. с англ.: M. A. Lampert, P. Mark, *Current Injection in Solids* (New York, Academic Press, 1970)].
2. Н. Мотт и Р. Герни, *Электронные процессы ионных кристллах* (ИЛ, Москва, 1950) [Пер. с англ.: N. F. Mott, R. W. Gurney, *Electronic Processes in Ionic Crystals* (Oxford University Press, London, 1940)].
3. J. Bisquert et al., Phys. Stat. Sol. A **203**, 3762 (2006).
4. K. W. Böer, Phys. Stat. Sol. B **248**, 2775 (2011).
5. H. Kroemer, IEEE Trans. Electron Devices **ED-15**, 819 (1968).
6. L. Esaki, R. Tsu, IBM J. Res. Dev. **14**, 61 (1970).
7. М. И. Овсянников, Ю. А. Романов, В. Н. Шабанов, Р. Г. Логинова, ФТП **4**, 2225 (1970).
8. Ж. И. Алферов, Ю. В. Жиляев, Ю. В. Шмарцев, ФТП **5**, 196 (1971).
9. Ю. А. Романов, ФТП **5**, 1434 (1971).
10. A. A. Lebedev, Semicond. Sci. Technol. **21**, R17 (2006).
11. K. Leo et al., Solid State Commun. **84**, 943 (1992).
12. V. G. Lyssenko et al., Phys. Rev. Lett. **79**, 301 (1997).
13. V. V. Makarov et al., Appl. Phys. Lett. **106**, 043503 (2015).
14. И. В. Алтухов и др., Письма в ЖЭТФ **103**, 128 (2016).
15. C. Waschke et al., Phys. Rev. Lett. **70**, 3319 (1993).
16. В. И. Санкин, А. В. Андрианов, А. О. Захарьин, А. Г. Петров, Письма в ЖЭТФ 94, 393 (2011).
17. А. В. Шорохов и др., Письма в ЖЭТФ **100**, 870 (2014).
18. А. А. Андронов и др., Письма в ЖЭТФ **102**, 235 (2015).
19. L. Subačius et al., Acta Physica Polonica A **119**, 167 (2011).
20. V. I. Sankin, A. V. Andrianov, A. O. Zakhar'in, A. G. Petrov, Appl. Phys. Lett. **100**, 111109 (2012).
21. C. Minot et al., Phys. Rev. B **91**, 245308 (2015).
22. V. Sankin et al., Nanoscale Research Letters **7**, 560 (2012).
23. A. E. Hramov et al., Phys. Rev. Lett. **112**, 116603 (2014).
24. T. Hyart, N. V. Alexeeva, J. Mattas, K. N. Alekseev, Phys. Rev. Lett. **102**, 140405 (2009).
25. J. F. Scott, J. Phys.: Condens. Matter **26**, 142202 (2014).
26. В. И. Санкин, А. А. Лепнева, ФТП **34**, 831 (2000).
27. H. Kroemer, IEEE Trans. Electron Devices **ED-14**, 476 (1967).
28. G. S. Gildenblat, A. R. Rao, S. S. Cohen, IEEE Trans. Electron Devices **ED-34**, 2165 (1987).
29. A. Sibille, J. F. Palmier, C. Minot, F. Mollot, Appl. Phys. Lett. **54**, 165 (1989).
30. T. Hyart, J. Mattas, K. N. Alekseev, Phys. Rev. Lett. **103**, 117401 (2009).
31. T. M. Fromhold et al., Nature **428**, 726 (2004).
32. См. Дополнительный материал по адресу .

Supplemental Material to
Spatial Distribution of Electric Field in a Quantum Superlattice with an Injecting Contact: Exact Solution.

In this Supplementary we present the details of calculations of the spatial field profiles $f(x)$, Eqs. (6MT)-(8MT)[1], and the voltage-current characteristics $u(j)$, Eqs. (9MT) and (10MT). Everywhere in our derivations presented we employ the scaled variables and dimensionless parameters introduced in the main text.

1. Equations for Spatial Distributions of the Electric Field

Here we derive Eqs. (6MT) and (7MT) and demonstrate that both these expressions become identical in the case $j = 1/2$.

Our starting point is the differential equation for the electric field (4MT) with the initial condition $f(x = 0) = f_e$. After separation of the variables and integration we get

$$\alpha x = \int\limits_{f(0)}^{f(x)} \frac{f\,df}{j(1+f^2) - f}. \tag{1}$$

Next, we make a substitution $f = z + \frac{1}{2j}$ and rewrite (1) as a sum of two integrals

$$\alpha x = \int\limits_{z(0)}^{z(x)} \frac{4jz\,dz}{4j^2z^2 - (1-4j^2)} + \int\limits_{z(0)}^{z(x)} \frac{2\,dz}{4j^2z^2 - (1-4j^2)}. \tag{2}$$

Depending on the value of the current density j, the expression $(1 - 4j^2)$ can be either positive or negative, and therefore both integrals in Eq. (2) should be taken in the different ways.

For $j < j^* = 1/2$ equation (2) reads

$$\alpha x = \int\limits_{z(0)}^{z(x)} \frac{4jz\,dz}{4j^2z^2 - b^2} + \int\limits_{z(0)}^{z(x)} \frac{2\,dz}{4j^2z^2 - b^2}, \tag{3}$$

where $b = \sqrt{1-4j^2} > 0$. After introducing an additional substitution $\psi = 2jz/b$ and then taking the integrals in (3) we get

$$\alpha x = \frac{1}{2j}\log\left|\psi^2 - 1\right|\Big|_{\psi(0)}^{\psi(x)} + \frac{1}{2jb}\log\left|\frac{\psi-1}{\psi+1}\right|\Bigg|_{\psi(0)}^{\psi(x)}, \tag{4}$$

which in terms of j can be rewritten as

$$\alpha x = \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{\sqrt{1-4j^2}}\log\left|\frac{1+\sqrt{1-4j^2}-2jf}{1-\sqrt{1-4j^2}-2jf}\right| + \log\left|\frac{4j\,(j-f+jf^2)}{1-4j^2}\right|\right)\Bigg|_{f(0)}^{f(x)}. \tag{5}$$

Simplifying (5) and taking into account that $f(0) = f_e$ we obtain

$$x_1(f) = \frac{1}{2\alpha j}\left(\frac{1}{\sqrt{1-4j^2}}\log\left|\frac{(1+\sqrt{1-4j^2}-2jf)(1-\sqrt{1-4j^2}-2jf_e)}{(1-\sqrt{1-4j^2}-2jf)(1+\sqrt{1-4j^2}-2jf_e)}\right| + \log\left|\frac{j-f+jf^2}{j-f_e+jf_e^2}\right|\right). \tag{6}$$

[1]The equation numbers with the letters MT, like (6MT), indicate corresponding formulas from the Main Text of the paper.

Since the arguments of both logarithms in (6) are always positive (see Section 2), one can drop the signs of the absolute value inside the log functions in (6), and thus obtain equation (6MT).

Now consider equation (2) for the case $j > j^* = 1/2$

$$\nu x = \int\limits_{z(0)}^{z(x)} \frac{4jz\,dz}{4j^2z^2 + c^2} + \int\limits_{z(0)}^{z(x)} \frac{2\,dz}{4j^2z^2 + c^2}, \tag{7}$$

where $c = \sqrt{4j^2 - 1} > 0$. After repeating the calculations described above one can obtain

$$\alpha x = \frac{1}{2j}\left(\frac{2}{\sqrt{4j^2-1}}\arctan\left(\frac{2jf-1}{\sqrt{4j^2-1}}\right) + \log\left|\frac{4j(j-f+jf^2)}{1-4j^2}\right|\right)\Bigg|_{f_e}^{f(x)} \tag{8}$$

and, eventually,

$$x_2(f) = \frac{1}{\alpha j\sqrt{4j^2-1}}\left(\arctan\left(\frac{2jf-1}{\sqrt{4j^2-1}}\right) - \arctan\left(\frac{2jf_e-1}{\sqrt{4j^2-1}}\right)\right) + \frac{1}{2\nu j}\log\left|\frac{j-f+jf^2}{j-f_e+jf_e^2}\right|. \tag{9}$$

Dropping the modulus sign in (9) due to the reasons discussed in Section 2 yields equation (7MT).

One should expect that the solutions $x_1(f)$ and $x_2(f)$, which are obtained for $j < j^*$ and $j > j^*$, respectively, coincide with each other in the limit $j \to j^*$. Simple analysis of Eqs. (6MT) and (7MT) indeed shows that

$$\lim_{j\to j^*-0} x_1(f) = \lim_{j\to j^*+0} x_2(f) = x_{j^*}(f),$$

where

$$x_{j^*}(f) = \frac{1}{\alpha}\left[\log\left(\frac{f-1}{f_e-1}\right)^2 + \frac{2(f-f_e)}{(f-1)(f_e-1)}\right]. \tag{10}$$

2. Analysis of the Moduli Problem

In this Section we demonstrate that the arguments of the logarithms in Eqs. (6) and (9) are always positive and also derive a compact form of the expression for $x_1(f)$, Eq. (8MT).

We start with consideration of equation (6), which for the case $j < j^*$ can be rewritten as

$$x_1(f) = \frac{1}{2\alpha j}\left(\frac{1}{\sqrt{1-4j^2}}\log\left|\frac{(f_+-f)(f_--f_e)}{(f_--f)(f_+-f_e)}\right| + \log\left|\frac{(f_+-f)(f_--f)}{(f_+-f_e)(f_--f_e)}\right|\right). \tag{11}$$

According to the classification given in the main text of the paper there are three different types of the spatial field profiles $f(x)$. Therefore our analysis of the arguments of log functions in Eq. (11) should be performed for each of these types separately:

- The first type of $f(x)$-profiles is determined by the boundary condition satisfying $f_e < f_-$. Since the stationary point f_- is an attractor, the electric field strength f remains less than f_-. Taking into account that $f_- < f_+$, one can see that the arguments of both logarithms are positive.

- For the second type of $f(x)$-profiles the boundary condition is $f_- < f_e < f_+$. The stationary point f_+ is unstable, and therefore the electric field strength is limited by the values f_+ and f_- so that $f_- < f < f_+$. The later conditions the positive value of the arguments of the log functions in (6).

- The $f(x)$ distributions, corresponding to the third type, always lie above the line $f = f_+$ (see Fig. 1d). In this case $f, f_e > f_+$, and again the arguments of the logarithms are positive.

Since Eq. (11) is equivalent to Eq. (6), we can also conclude that the arguments of the logarithms involved in (6) are positive as well. Note that after some simple transformation Eq. (11) can be simplified to the symmetric form (8MT).

Now consider the argument of the logarithm in equation (9)

$$r = \frac{j - f + jf^2}{j - f_e + jf_e^2}.$$

for the case $j > j^* = 1/2$. Both numerator and denominator of r are quadratic functions of f and f_e, respectively. These quadratic equations have the same discriminant which value is negative for $j > 1/2$. Therefore r itself is positive.

3. Equations for the Voltage Drop Across Superlattice

In this section we derive and analyze equations (9MT)-(10MT) for the dependence of the voltage dropped along the superlattices upon the electric current flowing through it. By integrating the basic equation $u = \int_0^1 f(x)dx$ by parts we obtain

$$u = f_c - \int_{f_e}^{f_c} x(f)\, df, \tag{12}$$

where f_c is defined by $x(f_c) = 1$. Substituting the expressions (6MT) and (7MT) into (12) and taking the corresponding integrals give us

$$u_1(j) = \frac{2(f_c - f_e) + \alpha}{2\alpha j} - \frac{1}{4\alpha j^2}\left[2\sqrt{1-4j^2}\,\mathrm{arctanh}\left(\frac{(f_c - f_e)\sqrt{1-4j^2}}{f_c + f_e - 2j(1 + f_c f_e)}\right) + \log\left(\frac{j - f_e + jf_e^2}{j - f_c + jf_c^2}\right)\right],$$

$$u_2(j) = \frac{f_c - f_e + \alpha}{\alpha j} - \frac{2}{\alpha\sqrt{4j^2-1}}\left[\arctan\left(\frac{2jf_c - 1}{\sqrt{4j^2-1}}\right) - \arctan\left(\frac{2jf_e - 1}{\sqrt{4j^2-1}}\right)\right], \tag{13}$$

where the inverse hyperbolic tangent function $\mathrm{arctanh}(y) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+y}{1-y}\right)$ $(y^2 < 1)$.

The above equations for $u_1(j)$ and $u_2(j)$, which are derived for the cases $j < j^*$ and $j > j^*$, respectively, must coincide with each other at $j < j^* = 1/2$. In order to check this, we consider the limits

$$\lim_{j \to j^* - 0} u_1 = 1 + \frac{2(f_c - f_e)}{\alpha} + \frac{1}{\alpha}\log\left(\frac{f_c - 1}{f_e - 1}\right)^2, \tag{14}$$

$$\lim_{j \to j^* + 0} u_2 = 2 + \frac{2(f_c - f_e)}{\alpha} - \frac{2(f_c - f_e)}{\alpha(f_c - 1)(f_e - 1)}. \tag{15}$$

Next, after substituting Eq. (10) into the condition $x_{j^*}(f_c) = 1$ we obtain the equality

$$\frac{1}{\alpha}\log\left(\frac{f_c - 1}{f_e - 1}\right)^2 + \frac{1}{\alpha}\frac{2(f_c - f_e)}{(f_c - 1)(f_e - 1)} = 1.$$

By using this equality, it is easy to see that the expressions (14) and (15) are indeed equivalent.

As a concluding remark, we would like to notice that our major analytical findings for electric field and voltage, Eqs. (6MT)-(9MT), were additionally verified by comparison with the results of numerical solution of the basic differential equation (4MT).