

*Lineaire Algebra*  
*met*  
*uitwerkingen*

GERTJAN LAAN

# LINEAIRE ALGEBRA

UITGEVERIJ CZARINA

# Inhoudsopgave

<i>I</i>	<i>Vectormeetkunde</i>	13
<i>1</i>	<i>Vectoren</i>	15
	<i>Inleiding</i>	15
	<i>Vectoren optellen</i>	16
	<i>De vector tussen twee punten</i>	19
	<i>Opgaven</i>	20
	<i>Scalaire vermenigvuldiging</i>	20
	<i>Vectorruimte</i>	21
	<i>Toepassing: magische vierkanten</i>	22
	<i>Vectorvoorstelling van een lijn</i>	23
	<i>Lijn met richtingscoëfficiënt <math>m</math> door punt <math>P</math></i>	25
	<i>Opgaven</i>	26
	<i>Van vergelijking naar vectorvoorstelling</i>	27
	<i>Van vectorvoorstelling naar vergelijking</i>	28
	<i>Opgaven</i>	29
<i>2</i>	<i>Lijnen</i>	31
	<i>Snijpunt van niet-evenwijdige lijnen</i>	31
	<i>Vegen</i>	32
	<i>Vegen in de coëfficiëntenmatrix</i>	33
	<i>Drie vergelijkingen</i>	35
	<i>Opgaven</i>	38
	<i>Evenwijdige lijnen en hun vergelijkingen</i>	38
	<i>Evenwijdige lijnen en hun vectorvoorstellingen</i>	41
	<i>Snijpunt van twee lijnen</i>	42
	<i>Opgaven</i>	44

3	<i>Lengte, hoek en inproduct</i>	47
	<i>Lengte van een vector</i>	47
	<i>De afstand tussen twee punten</i>	48
	<i>Opgaven</i>	48
	<i>De hoek tussen twee vectoren</i>	49
	<i>Opgaven</i>	50
	<i>Het inproduct</i>	51
	<i>Opgaven</i>	52
	<i>De normaalvorm van een lijn</i>	52
	<i>De normaalvorm van een lijn door een punt P</i>	55
	<i>Van vectorvoorstelling naar vergelijking, en omgekeerd</i>	56
	<i>Opgaven</i>	57
4	<i>Meetkunde</i>	59
	<i>De hoek tussen twee lijnen</i>	59
	<i>De afstand van een punt tot een lijn</i>	61
	<i>De afstand tussen twee evenwijdige lijnen</i>	63
	<i>De zwaartelij</i>	64
	<i>De middelloodlijn</i>	65
	<i>De hoogtelijn</i>	65
	<i>De bissectrice</i>	66
	<i>Opgaven</i>	67
5	<i>Vectoren in de ruimte</i>	69
	<i>De lengte van een vector in <math>\mathbb{R}^3</math></i>	70
	<i>De afstand tussen twee punten in <math>\mathbb{R}^3</math></i>	71
	<i>De hoek tussen twee vectoren</i>	71
	<i>Loodrechte vectoren</i>	72
	<i>Vectorvoorstelling van een lijn in <math>\mathbb{R}^3</math></i>	74
	<i>Onderlinge ligging van lijnen in <math>\mathbb{R}^3</math></i>	74
	<i>Opgaven</i>	76
6	<i>Vlakken: vectorvoorstelling</i>	79

	<i>Vlakken in <math>\mathbb{R}^3</math></i>	79
	<i>Een basis voor <math>\mathbb{R}^2</math></i>	80
	<i>Toepassing: stereosignaal</i>	83
	<i>Vectorvoorstelling van een vlak</i>	83
	<i>Snijpunt van lijn en vlak</i>	86
	<i>Opgaven</i>	86
7	<i>Vlakken: vergelijking</i>	89
	<i>Normaalvector van een vlak</i>	89
	<i>De normaalvorm van een vlak</i>	90
	<i>Tekening maken van een vlak</i>	92
	<i>Onderlinge ligging van twee vlakken</i>	93
	<i>Onderlinge ligging van lijn en vlak</i>	94
	<i>Opgaven</i>	95
8	<i>Hoeken en afstanden in de ruimte</i>	99
	<i>De hoek tussen twee lijnen</i>	99
	<i>De hoek tussen twee vlakken</i>	99
	<i>De hoek tussen een lijn en een vlak</i>	100
	<i>De afstand tussen punt en vlak</i>	101
	<i>De afstand tussen een punt en een lijn</i>	101
	<i>De afstand tussen twee kruisende lijnen</i>	102
	<i>Opgaven</i>	104
II	<i>Lineaire algebra</i>	107
9	<i>Matrices</i>	109
	<i>Wat is een matrix?</i>	109
	<i>Optellen</i>	110
	<i>Toepassing: voorraadmatrix</i>	110
	<i>Matrixvermenigvuldiging</i>	111
	<i>Toepassing: inkoopkosten</i>	113
	<i>Distributiviteit</i>	114

	<i>Vector als matrix</i>	114	
	<i>Scalaire vermenigvuldiging</i>	115	
	<i>Een matrix als afbeelding</i>	116	
	<i>Online uitvoeren van matrixberekeningen</i>	118	
	<i>Opgaven</i>	119	
10	<i>Lineaire afbeeldingen</i>	121	
	<i>Het beeld van de eenheidsvector</i>	121	
	<i>Eenheidsmatrix</i>	122	
	<i>Stelsel lineaire vergelijkingen</i>	123	
	<i>Een matrix als lineaire afbeelding</i>	124	
	<i>Opgaven</i>	125	
	<i>Rotatie om de oorsprong is lineair</i>	126	
	<i>Andere kijk op de definitie</i>	127	
	<i>Opgaven</i>	128	
	<i>Afbeeldingsvergelijkingen</i>	129	
	<i>Opgaven</i>	131	
	<i>Overzicht lineaire afbeeldingen</i>	132	
11	<i>Een paar stellingen</i>	135	
	<i>Opgaven</i>	137	
12	<i>Onafhankelijkheid</i>	139	
	<i>De determinant</i>	139	
	<i>De <math>3 \times 3</math>-determinant</i>	140	
	<i>Een basis voor <math>\mathbb{R}^2</math></i>	141	
	<i>Een basis voor <math>\mathbb{R}^3</math></i>	142	
	<i>Opgaven</i>	142	
	<i>Het vinden van een matrix</i>	143	
	<i>Basisvectoren bij afbeeldingen in <math>\mathbb{R}^2</math></i>	148	
	<i>Basisvectoren bij afbeeldingen in <math>\mathbb{R}^3</math></i>	150	
	<i>Opgaven</i>	151	

13	<i>Kern, beeldruimte en samenstellingen</i>	153
	<i>De kern van een afbeelding</i>	153
	<i>Het volledig origineel</i>	154
	<i>Opgaven</i>	155
	<i>De beeldruimte</i>	156
	<i>Opgaven</i>	157
	<i>Samengestelde afbeelding</i>	158
	<i>Opgaven</i>	161
	<i>Toepassing: goniöformules</i>	161
14	<i>Inverse afbeeldingen</i>	163
	<i>Surjectief en injectief</i>	163
	<i>Voorbeelden van inverse afbeeldingen</i>	164
	<i>Matrix van de inverse afbeelding</i>	165
	<i>Reguliere afbeeldingen</i>	166
	<i>Opgaven</i>	168
	<i>De inverse bepalen</i>	168
	<i>Opgaven</i>	170
	<i>Stelsel oplossen met inverse</i>	171
	<i>Toepassing: computer graphics</i>	172
	<i>Opgave</i>	175
15	<i>Uitwerkingen</i>	177
	<i>Uitwerkingen hoofdstuk 1</i>	177
	<i>Uitwerkingen hoofdstuk 2</i>	179
	<i>Uitwerkingen hoofdstuk 3</i>	184
	<i>Uitwerkingen hoofdstuk 4</i>	186
	<i>Uitwerkingen hoofdstuk 5</i>	191
	<i>Uitwerkingen hoofdstuk 6</i>	193
	<i>Uitwerkingen hoofdstuk 7</i>	196
	<i>Uitwerkingen hoofdstuk 8</i>	202
	<i>Uitwerkingen hoofdstuk 9</i>	209
	<i>Uitwerkingen hoofdstuk 10</i>	211
	<i>Uitwerkingen hoofdstuk 11</i>	216

<i>Uitwerkingen hoofdstuk 12</i>	220
<i>Uitwerkingen hoofdstuk 13</i>	226
<i>Uitwerkingen hoofdstuk 14</i>	230

<i>Grieks alfabet</i>	235
-----------------------	-----

<i>Index</i>	237
--------------	-----



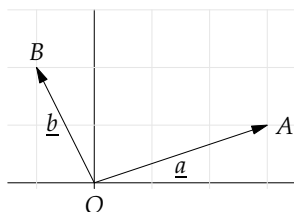
# 1

## Vectoren

VECTOREN vormen de basis voor vectormeetkunde en lineaire algebra. Een vector is een object dat kan verwijzen naar een absolute positie, maar een vector kan ook een relatieve verplaatsing aangeven. Vectoren zijn dankzij deze tweeslachtigheid een krachtig hulpmiddel om berekeningen in het platte vlak en in de ruimte te doen. In dit hoofdstuk maak je kennis met vectoren en een groot aantal van hun eigenschappen.

### 1.1 Inleiding

Een leerling die voor het eerst met coördinaten te maken krijgt, leert de betekenis van  $A(3, 1)$  door vanuit de oorsprong eerst drie naar rechts en vervolgens een omhoog te gaan. Dat is in essentie, althans voorlopig, wat een *vector* is. Het is gebruikelijk een vector te tekenen als een *pijl*. In figuur 1.1 zie je de vectoren  $\overrightarrow{OA}$  en  $\overrightarrow{OB}$ .

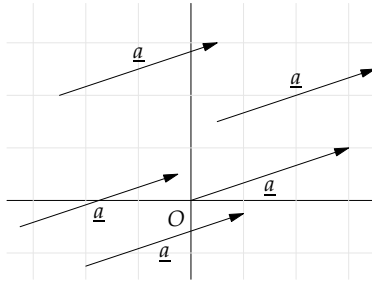


Figuur 1.1: Een vector die vanuit  $O$  een punt aanwijst heet de *plaatsvector* van dat punt.

We noteren:  $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ , vanuit de oorsprong drie naar rechts en een omhoog. De vector  $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$  wijst het punt  $A(3, 1)$  aan. De getallen waarmee je de vector noteert heten de *kentallen* of *componenten* van die vector. De vector  $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$  wijst het punt  $B$  aan.

De vectoren  $\vec{OA}$  en  $\vec{OB}$  heten *plaatsvectoren*, omdat ze vanuit de oorsprong de plaats van een punt, in dit geval het punt  $A$  of  $B$ , aanwijzen.

Een vector als  $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$  hoeft niet per se in de oorsprong te beginnen, hij kan zich vrij bewegen, het is een zogeheten *vrije vector*, zie figuur 1.2.



Figuur 1.2: Vrije vector  $\underline{a}$

Omdat een vector zich vrij kan bewegen, is het vaak handiger hem niet naar zijn begin- en eindpunt te noemen, maar hem een andersoortige naam te geven. De naam van een vector bestaat meestal uit één letter, zoals  $\mathbf{a}$ . In de literatuur zijn verschillende notaties in omloop om vectoren te kunnen onderscheiden van andere grootheden. Dit zijn een paar van die notaties:

- vetgedrukt:  $\mathbf{a}$
- met een pijltje of met een harpoenhaakje erboven:  $\vec{a}$  of  $\hat{a}$
- met een streepje erboven of eronder:  $\bar{a}$  of  $\underline{a}$

Typografisch is vetgedrukt waarschijnlijk het mooist, maar in handgeschreven tekst is vet moeilijk van normaal schrift te onderscheiden. Ik kies daarom voor een notatie die makkelijk schrijft:  $\underline{a}$ .

## 1.2 Vectoren optellen

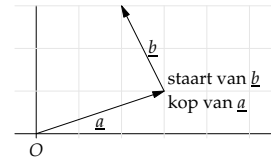
Als de vector  $\underline{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$  drie naar rechts en een omhoog betekent, en dus  $\underline{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$  een naar links en twee omhoog, en je voert dit achter elkaar uit, dan ben je per saldo twee naar rechts opgeschoten, en drie naar boven. Dit kun je noteren als de som van twee

vectoren:

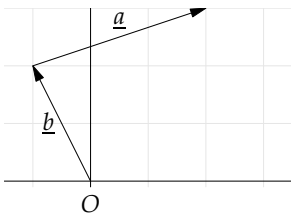
$$\underline{a} + \underline{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Bij het tekenen van de som  $\underline{a} + \underline{b}$  leg je de vectoren 'kop aan staart', zoals in figuur 1.3.

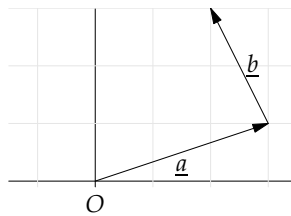
De volgorde waarin je optelt maakt niet uit, met  $\underline{a} + \underline{b}$  kom je in hetzelfde punt uit als met  $\underline{b} + \underline{a}$ , zoals je in figuur 1.4 kunt zien. De berekening  $\underline{b} + \underline{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$  bevestigt dat.



Figuur 1.3: Het optellen van twee vectoren doe je meetkundig door de vectoren met hun kop en staart achter elkaar te leggen. Deze manier wordt wel de kop-staartmethode genoemd.



(a)  $\underline{b} + \underline{a}$



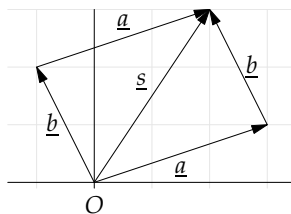
(b)  $\underline{a} + \underline{b}$

Figuur 1.4: Optellen van vectoren is commutatief

De som van twee vectoren is dus opnieuw een vector, in dit voorbeeld de vector  $\underline{s} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ , en de optelling is *commutatief*:

$$\underline{a} + \underline{b} = \underline{s} = \underline{b} + \underline{a} \tag{1.1}$$

De commutativiteit kun je ook laten zien in één tekening, zoals in figuur 1.5.



Figuur 1.5:  $\underline{s} = \underline{a} + \underline{b} = \underline{b} + \underline{a}$ , de vectoren vormen een parallellogram waarvan  $\underline{s}$  de diagonaal is. Deze tekening wordt vaak de *parallellogramconstructie* van de som van twee vectoren genoemd

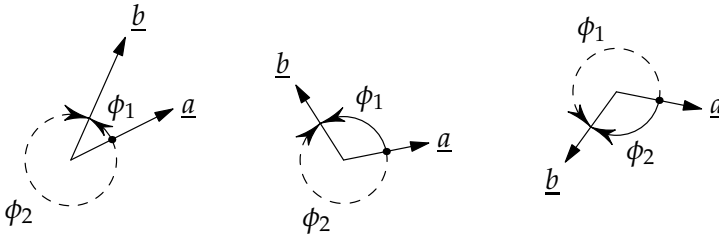
Samengevat: het optellen van vectoren doe je als volgt:

- meetkundig door het achter elkaar leggen van de pijlen: de kop-staartmethode of de parallellogramconstructie
- algebraïsch door het componentsgewijs optellen van de kentallen



### 3.4 De hoek tussen twee vectoren

Voor het vastleggen van de hoek  $\phi$  tussen twee vectoren  $\underline{a}$  en  $\underline{b}$  heb je in principe verschillende mogelijkheden: je kunt de hoek meten van  $\underline{a}$  naar  $\underline{b}$  tegen de klok in ( $\phi_1$ ), of met de klok mee ( $\phi_2$ ). Zie figuur 3.2.



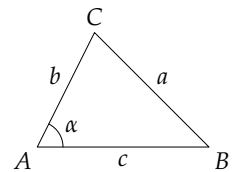
Figuur 3.2: De hoek van  $\underline{a}$  naar  $\underline{b}$  is de kleinste van  $\phi_1$  of  $\phi_2$

In het algemeen is een van beide hoeken de kleinste van de twee (behalve als de vectoren gelijke of tegengestelde richting hebben), we spreken af dat *de* hoek tussen de vectoren de hoek is met een waarde tussen  $0^\circ$  en  $180^\circ$ , of in radialen:

$$0 \leq \phi \leq \pi$$

Met behulp van de *cosinusregel* kun je een formule afleiden voor de hoek tussen twee gegeven vectoren. De cosinusregel voor een willekeurige driehoek  $ABC$  luidt:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \tag{3.3}$$



Figuur 3.3: De cosinusregel:  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$

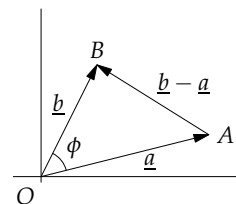
Met twee gegeven vectoren  $\underline{a} = \overrightarrow{OA}$  en  $\underline{b} = \overrightarrow{OB}$  kun je driehoek  $OAB$  maken, als in figuur 3.4.

Als je de cosinusregel toepast op deze driehoek, krijg je:

$$|\underline{b} - \underline{a}| = \sqrt{|\underline{a}|^2 + |\underline{b}|^2 - 2|\underline{a}||\underline{b}|\cos \phi}$$

Met de formule voor de lengte van vector  $|\underline{b} - \underline{a}|$  uit de vorige paragraaf levert dit:

$$(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 = (a_1^2 + a_2^2) + (b_1^2 + b_2^2) - 2|\underline{a}||\underline{b}|\cos \phi$$



Figuur 3.4: Pas de cosinusregel toe op driehoek  $OAB$

Wanneer je links de haakjes uitwerkt, en de gemeenschappelijke termen links en rechts weglaat, houd je de volgende gelijkheid over:

$$-2a_1b_1 - 2a_2b_2 = -2|\underline{a}||\underline{b}|\cos\phi$$

Hieruit volgt:

$$a_1b_1 + a_2b_2 = |\underline{a}||\underline{b}|\cos\phi \quad (3.4)$$

En ook:

$$\cos\phi = \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{|\underline{a}||\underline{b}|}, \quad |\underline{a}|, |\underline{b}| \neq 0 \quad (3.5)$$

Je kunt de hoek  $\phi$  tussen twee vectoren  $\underline{a}$  en  $\underline{b}$  dus berekenen met behulp van de inverse cosinus, dat wil zeggen:

$$\phi = \arccos\left(\frac{a_1b_1 + a_2b_2}{|\underline{a}||\underline{b}|}\right) \quad (3.6)$$

In figuur 3.5 zie je de grafiek van  $\arccos x$ .

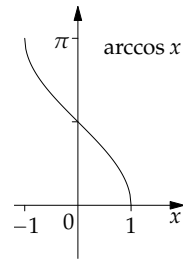
**Voorbeeld 3.3.** Bepaal de hoek tussen de vectoren  $\underline{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$  en  $\underline{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ .

*Oplossing.*

Er geldt:  $a_1b_1 + a_2b_2 = -1 \cdot 5 + 3 \cdot 2 = 1$ , en verder is  $|\underline{a}| = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$  en  $|\underline{b}| = \sqrt{25+4} = \sqrt{29}$ .

Volgens (3.5) geldt:  $\cos\phi = \frac{1}{\sqrt{10}\sqrt{29}}$ , dus  $\phi = \arccos \frac{1}{\sqrt{290}}$ .

Met de rekenmachine volgt  $\phi = 1.512$  rad, of  $86.6^\circ$  ▲



Figuur 3.5: De grafiek van de inverse cosinus. Merk op dat alle functiewaarden tussen 0 en  $\pi$  liggen, precies als nodig is voor de hoek tussen twee vectoren

### 3.5 Opgaven

25. Bereken de hoeken tussen de volgende tweetallen vectoren  $\underline{a}$  en  $\underline{b}$  (rond af op hele graden).

- a.  $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$  en  $\begin{pmatrix} 12 \\ -5 \end{pmatrix}$                       b.  $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$  en  $\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$                        $\begin{pmatrix} 1 \\ -7 \end{pmatrix}$   
 c.  $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  en

26. Teken de vectoren  $\underline{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\underline{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix}$  en  $\underline{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ . Geef een schatting voor  $\angle(\underline{a}, \underline{b})$  en  $\angle(\underline{b}, \underline{c})$ , en bereken deze hoeken.

### 3.6 Het inproduct

De uitdrukking  $a_1b_1 + a_2b_2$  die in formule (3.5) voorkomt, is zo belangrijk dat hij een eigen naam heeft: het *inwendig product* of kortweg: *inproduct*.

**Definitie 3.4.** Het inproduct  $\underline{a} \cdot \underline{b}$  van twee vectoren, zeg  $\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$  en  $\underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ , wordt gedefinieerd door:

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2$$

In plaats van de notatie  $\underline{a} \cdot \underline{b}$  is voor het inproduct ook de notatie met een dikke punt gebruikelijk,  $\underline{a} \bullet \underline{b}$ , waarschijnlijk om verwarring met de 'gewone' vermenigvuldiging tussen getallen te voorkomen. Tussen vectoren is echter geen gewone vermenigvuldiging gedefinieerd, dus duidt  $\underline{a} \cdot \underline{b}$  vanzelf op het inproduct.

**Voorbeeld 3.5.** Bepaal het inproduct van  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  en  $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ .

*Oplossing.*

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 11 \quad \blacktriangle$$

**Voorbeeld 3.6.** Bepaal het inproduct van  $\underline{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  en  $\underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ .

*Oplossing.*

$$\underline{n} \cdot \underline{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = ax + by \quad \blacktriangle$$

Het inproduct is dus een bijzonder soort vermenigvuldiging tussen twee vectoren, en de uitkomst is een reëel getal.

Het inproduct heet soms *scalair product*, omdat de uitkomst een scalar (reëel getal) is. Niet te verwarren met de scalaire vermenigvuldiging, zie paragraaf 1.5, waarvan de uitkomst een vector is.

Met behulp van het inproduct kun je (3.4) en (3.5) herschrijven tot:

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = |\underline{a}| |\underline{b}| \cos \phi \quad (3.7)$$

en

$$\cos \phi = \frac{\underline{a} \cdot \underline{b}}{|\underline{a}| |\underline{b}|}, \quad |\underline{a}|, |\underline{b}| \neq 0 \quad (3.8)$$

Vaak komt het voor dat je moet nagaan of twee vectoren *loodrecht* op elkaar staan. Dat kan met het inproduct. Uit de uitdrukking  $\underline{a} \cdot \underline{b} = |\underline{a}| |\underline{b}| \cos \phi$  volgt:

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = 0 \iff |\underline{a}| = 0 \vee |\underline{b}| = 0 \vee \cos \phi = 0 \quad (3.9)$$

$|\underline{a}| = 0$  of  $|\underline{b}| = 0$  duidt erop dat  $\underline{a}$  of  $\underline{b}$  de nulvector is, dat zal meestal niet het geval zijn.





# 6

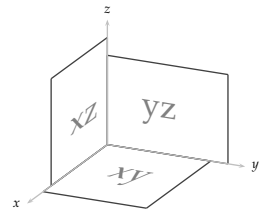
## Vlakken: vectorvoorstelling

HET platte vlak, of  $\mathbb{R}^2$ , kent maar één vlak: zichzelf. De ruimte  $\mathbb{R}^3$  daarentegen, kun je vullen met oneindig veel verschillende vlakken.

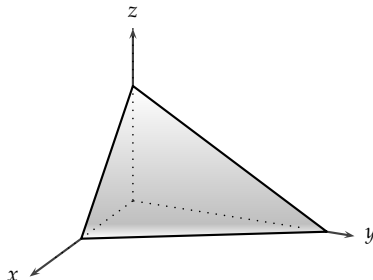
### 6.1 Vlakken in $\mathbb{R}^3$

In figuur 6.1 zie je drie vlakken in de ruimte getekend, gevormd door de assen: het grondvlak of het  $xy$ -vlak, het linker zijvlak of  $xz$ -vlak en het rechter zijvlak of  $yz$ -vlak. Deze vlakken heten de *coördinaatvlakken*. Om de vlakken zichtbaar te kunnen maken is er een kader omheen getekend, maar in feite zijn de vlakken oneindig groot, net zo onbegrensd als de assen, zowel in de positieve als in de negatieve richting.

De drie vlakken in figuur 6.1 zijn uiteraard niet de enige. Een kubus bijvoorbeeld heeft zes zijvlakken, die alle zes in principe onbegrensd zijn. Een vlak hoeft niet parallel te lopen aan een van de assen. In figuur 6.2 zie je een 'schuin' vlak getekend.



Figuur 6.1: Een klein stukje van het positieve gedeelte van de drie coördinaatvlakken: het  $xy$ -,  $xz$ - en  $yz$ -vlak



Figuur 6.2: De driehoek wordt gevormd door de snijlijnen van het vlak met de coördinaatvlakken

Ook dit vlak is onbegrensd, en loopt ver voorbij de getekende

snijlijnen door die de driehoek vormen.

Elk vlak in de ruimte kun je vastleggen met een vectorvoorstelling, vergelijkbaar met die van een lijn. Om te begrijpen hoe dat kan, ga ik eerst terug naar de  $\mathbb{R}^2$  om een paar begrippen te introduceren.

## 6.2 Een basis voor $\mathbb{R}^2$

De vectoren  $e_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  en  $e_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  in  $\mathbb{R}^2$  wijzen beide in de richting van een van de assen, en ze hebben lengte 1. Ze heten *eenheidsvectoren*, zie figuur 6.3.

Deze eenheidsvectoren hebben, dankzij de eigenschappen (1.1) tot en met (1.10) uit hoofdstuk 1, dus dankzij het feit dat  $\mathbb{R}^2$  een vectorruimte is, een bijzondere eigenschap. Ze vormen een *basis* voor  $\mathbb{R}^2$ . Het zijn zogeheten *basisvectoren*. Wat wil dat zeggen?

Dat wil zeggen dat je elke vector uit  $\mathbb{R}^2$  kunt maken met behulp van deze basisvectoren, via scalaire vermenigvuldiging en optellen van vectoren. Bijvoorbeeld:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 8 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

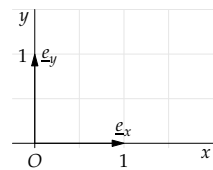
of:

$$\begin{pmatrix} -10 \\ 37 \end{pmatrix} = -10 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 37 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

In het algemeen: 
$$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = p \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (6.1)$$

Een uitdrukking als (6.1) heet een *lineaire combinatie* van  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  en  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

**Definitie 6.1.** Een lineaire combinatie van twee vectoren  $\underline{a}$  en  $\underline{b}$  is een uitdrukking van de vorm  $\lambda \underline{a} + \mu \underline{b}$ , met  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ . ■



Figuur 6.3: De eenheidsvectoren van  $\mathbb{R}^2$

Als je alle mogelijke lineaire combinaties van de vectoren  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  en  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  opschrijft, krijg je *alle* vectoren van  $\mathbb{R}^2$ . We zeggen ook wel dat de vectoren  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  en  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  de  $\mathbb{R}^2$  *voortbrengen*. Of korter: dat ze een basis vormen voor  $\mathbb{R}^2$ .

Het aardige is, dat de vectoren  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  en  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  niet de enige basis vormen. Je kunt ook een tweetal betrekkelijk willekeurige vectoren nemen, bijvoorbeeld  $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$  en  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Kun je nu  $\begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix}$  ook als lineaire combinatie schrijven van deze twee?

Dan moet gelden:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Oftewel:

$$\begin{cases} 3 = 2\lambda + \mu \\ 8 = 5\lambda + \mu \end{cases}$$

Uit paragraaf 2.6 weet je dat dit stelsel precies één oplossing heeft als de determinant van het stelsel ongelijk aan nul is. De determinant is  $2 \cdot 1 - 5 \cdot 1 = -3$ . Inderdaad ongelijk aan nul.

Welke vector je in plaats van  $\begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix}$  ook neemt, de determinant verandert niet van waarde.

En dus heeft het stelsel telkens een oplossing. Dus ook  $\begin{pmatrix} -10 \\ 37 \end{pmatrix}$  en elke andere vector kun je als lineaire combinatie schrijven van  $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$  en  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Conclusie: de vectoren  $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$  en  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  vormen ook een basis voor  $\mathbb{R}^2$ .

In het algemeen geldt dat twee vectoren  $\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$  en  $\underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$  een basis voor  $\mathbb{R}^2$  vormen als je elke vector  $\underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$  kunt schrijven als lineaire combinatie van  $\underline{a}$  en  $\underline{b}$ :

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$



## 14.9 Toepassing: computer graphics

Computer graphics bestaan doorgaans uit bewegende objecten op een beeldscherm. Om als programmeur een object te laten bewegen, moet je het snel achter elkaar laten tekenen, eventueel vervormd of gedraaid of gespiegeld, en op verschillende plaatsen op het scherm. Zo'n scherm heeft een denkbeeldig assenstelsel, met de oorsprong meestal in de linker bovenhoek, en met de positieve  $y$ -as naar beneden gericht.

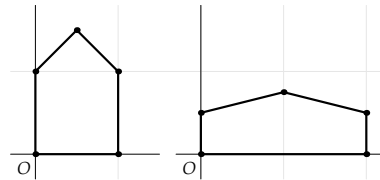
Elk beeldpunt (pixel) is via zijn  $x$ - en  $y$ -coördinaat bereikbaar en kun je aan- of uitzetten of een andere kleur geven. Aan dit alles zit (veel) rekenwerk vast, dat je voor een groot deel kunt laten uitvoeren met behulp van lineaire algebra. Eerder heb je gezien dat je transformaties in het platte vlak kunt beschrijven met een matrix. Hieronder zie je een opsomming van een aantal van die transformaties.

**Schalen** (uitrekken of krimpen) doe je met een

matrix van de vorm  $\begin{pmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{pmatrix}$ .

Bijvoorbeeld  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  rekt een figuur uit met

een factor 2 in de  $x$ -richting, en  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & .5 \end{pmatrix}$  doet de figuur met een factor .5 krimpen in de  $y$ -richting.

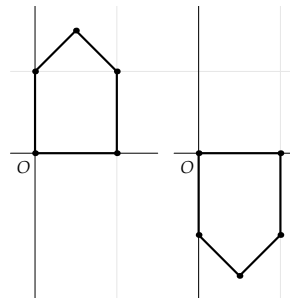


**Spiegelen** in de  $x$ -as doe je met een matrix van

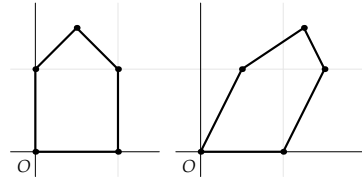
de vorm  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ .

En spiegelen in de  $y$ -as met  $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Merk op

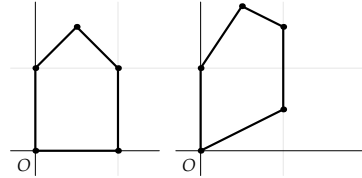
dat spiegelen in de assen een speciaal geval is van schalen, met factor  $-1$ .



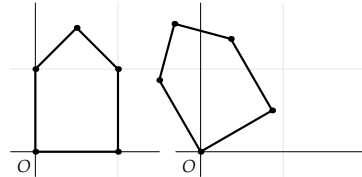
**Scheeftrekken** in de  $x$ -richting doe je met een matrix van de vorm  $\begin{pmatrix} 1 & s_x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .



**Scheeftrekken** in de  $y$ -richting met een matrix van de vorm  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s_y & 1 \end{pmatrix}$ .



**Roteren** om  $O$  over een hoek  $\alpha$  doe je met een matrix van de vorm  $\begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$ .



Je kunt afbeeldingen uit deze lijst samenstellen via matrixvermenigvuldiging, maar dat heeft een belangrijke beperking: het zijn lineaire afbeeldingen, en dus zitten alle afbeeldingen vast aan de oorsprong. Wat je in computer graphics veelvuldig nodig hebt is een translatie (verplaatsing). Maar een translatie is geen lineaire afbeelding, omdat daarbij de oorsprong niet op zijn plaats blijft. Hoe dit op te lossen?

De truc is over te gaan op *homogene coördinaten*. Het komt er daarbij op neer dat je het platte vlak, het  $x, y$ -vlak, over een afstand 1 als het ware omhoog schuift, naar  $z = 1$ . Het punt  $(2, 4)$  komt dan terecht in het punt  $(2, 4, 1)$  en het punt  $(0, -1)$  wordt  $(0, -1, 1)$ . In het algemeen betekent de overgang naar homogene coördinaten:

$$(a, b) \rightarrow (a, b, 1)$$

Omgekeerd interpreteer je een punt als  $(3, 4, 1)$  als het punt  $(3, 4)$  in het platte vlak.

Dit heeft natuurlijk gevolgen voor de matrix van de transformaties. De matrix  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  wordt  $\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .



- d. Een steunvector is  $\underline{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ , een richtingsvector is  $\underline{a} - \underline{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ . Dus  $AC: \underline{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ .
- e. Er geldt:  $\underline{b} = -2\underline{c}$ , dus  $\underline{b}$  en  $\underline{c}$  liggen in elkaars verlengde. De lijn  $BC$  gaat door  $O$ :  $\underline{x} = \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ .
- f.  $\underline{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ .
8. a. Als  $x = 3$ , is  $3 = 1 + 2\lambda$  en dus  $\lambda = 1$ . Hieruit volgt  $y = -1 + 1 \cdot 3 = 2$ . Als  $y = 8$ , is  $8 = -1 + 3\lambda$  en dus  $\lambda = 3$ . Hieruit volgt  $x = 1 + 3 \cdot 2 = 7$ .
- b. Nee. Wegens  $x = 4$  volgt uit  $1 + 2\lambda = 4$  dat  $\lambda = \frac{3}{2}$ , maar dan is  $y = -1 + \frac{3}{2} \cdot 3 \neq 5$ .
- c. Ja,  $\lambda = -1$ .
- d. Nee. Wegens  $x = -11$  volgt uit  $1 + 2\lambda = -11$  dat  $\lambda = -6$ , maar dan is  $y = -1 + -6 \cdot 3 \neq -28$ .
9. a.  $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$  is richtingsvector van  $l$ , dus  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2\frac{1}{2} \end{pmatrix}$  ook, dus de richtingscoëfficiënt van  $l$  is  $2\frac{1}{2}$ . Een punt van  $l$  is  $(1, -1)$ . De vergelijking van  $l$  is  $y - (-1) = 2\frac{1}{2}(x - 1)$ , oftewel  $y = 2\frac{1}{2}x - 3\frac{1}{2}$ .
- b.  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ .
10. Vectorvoorstelling is  $\underline{x} = \underline{a} + \lambda(\underline{a} - \underline{b})$ , oftewel  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ . Uit richtingsvector  $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$  volgt richtingscoëfficiënt  $= 1\frac{1}{2}$ , dus vergelijking is  $y - 4 = 1\frac{1}{2}(x - 1)$ , oftewel  $y = 1\frac{1}{2}x + 2\frac{1}{2}$ .
11. Richtingscoëfficiënt is  $\frac{7}{3}$ , dus richtingsvector is  $\begin{pmatrix} 1 \\ 7/3 \end{pmatrix}$  of  $\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$ .  $(1, 0)$  is een punt van de lijn. Een vectorvoorstelling is  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$ .

## 15.2 Uitwerkingen hoofdstuk 2

12. Ik gebruik eerst het getal  $-1$  linksboven in de matrix om de eerste kolom schoon te vegen, en vervolgens het getal  $-1$  in het midden om de tweede nul in de onderste rij te maken:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & -2 \\ 1 & 7 & -1 & 6 \end{array} \right) \begin{array}{l} \times 2 \\ \downarrow \\ \downarrow \end{array} \begin{array}{l} \times 1 \\ \rightarrow \\ \downarrow \end{array} \left( \begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 8 & -2 & 6 \end{array} \right) \begin{array}{l} \times 8 \\ \downarrow \end{array} \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -10 & -10 \end{array} \right)$$

Uit de onderste rij volgt:  $z = 1$ , uit de tweede rij:  $y = 1$  en uit de eerste rij:  $x = 0$ . De oplossing is dus  $(0, 1, 1)$



13. Als je de matrix van het stelsel opschrijft komt er een nul linksboven:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -6 & -2 \\ 1 & -1 & -2 & -2 \end{array} \right)$$

Bovendien zie je dat je de getallen in de tweede rij door 2 kunt delen. Het is vaak (maar niet altijd) verstandig de getallen zo klein mogelijk te maken. De tweede rij door 2 delen en de eerste en tweede rij verwisselen levert:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & -2 \end{array} \right) \begin{array}{l} \times -1 \\ \\ \downarrow \end{array} \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{array} \right)$$

Je ziet nu dat de tweede en derde rij een factor  $-1$  verschillen: de bijbehorende vergelijkingen zijn *afhankelijk*. Wanneer je de ene rij bij de andere optelt, krijg je een *nulrij*:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

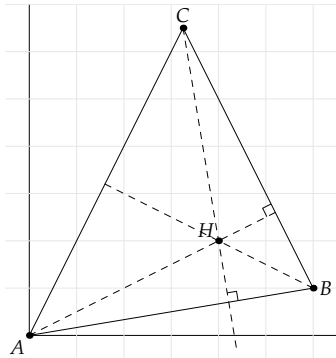
Zo'n nulrij bevat geen echte informatie, wat overblijft zijn twee vergelijkingen met drie variabelen. Je kunt een van de variabelen vrij kiezen, bijvoorbeeld  $z = \lambda$ . Als je dit invult in de tweede rij krijg je  $y = 1 + \lambda$ . Als je  $z = \lambda$  invult in de bovenste rij krijg je  $x = -1 + 3\lambda$ . De oplossing zijn dan:  $(-1 + 3\lambda, 1 + \lambda, \lambda)$ , met  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

14. In de matrix van dit stelsel staat linksboven niet een 1. Je zou de bovenste rij door 2 of door  $-2$  kunnen delen, maar dan ontstaan er breuken, en dat rekt lastiger. Het is in dit geval ook niet nodig door 2 te delen, omdat je met  $-2$  ook uitstekend kunt vegen:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} -2 & 3 & -2 & -2 \\ 4 & -9 & -4 & -1 \\ 6 & -9 & 2 & 4 \end{array} \right) \begin{array}{l} \times 2 \times 3 \\ \downarrow \\ \downarrow \end{array} \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} -2 & 3 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & -8 & -5 \\ 0 & 0 & -4 & -2 \end{array} \right)$$

Er is vanzelf een tweede nul in de onderste rij ontstaan. De oplossing is  $z = \frac{1}{2}$ ,  $y = \frac{1}{3}$  en  $x = 1$ , oftewel  $(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{2})$ .

Hoewel de opgaven vaak zo zijn geconstrueerd dat je de uitwerking met uitsluitend gehele getallen kunt maken, zijn breuken soms onvermijdelijk.



Figuur 15.12: Driehoek ABC met  $C(3\frac{1}{4}, 6\frac{1}{2})$

ene en/of andere vectorvoorstelling levert  $S(1,0)$ .

Richtingsvector van  $l$  is  $(\frac{5}{12})$ , deze heeft lengte  $\sqrt{5^2 + 12^2} = 13$ , dus  $r_1 = 5(\frac{5}{12})$  heeft lengte 65.

Richtingsvector van  $m$  is  $(-\frac{3}{4})$ , deze heeft lengte  $\sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$ , dus  $r_2 = 13(-\frac{3}{4})$  heeft lengte 65.

Richtingsvector van een van de bissectrices is  $r_1 + r_2 = (\frac{25}{60}) + (-\frac{39}{52}) = (\frac{64}{8})$

Dus ook  $(\frac{8}{1})$  is een richtingsvector. Dus een vectorvoorstelling van deze bissectrice is  $b_1: (\frac{x}{y}) = (\frac{1}{0}) + \nu(\frac{8}{1})$ . De andere bissectrice staat er loodrecht op en gaat ook door  $S(1,0)$ , dus een vectorvoorstelling is  $b_2: (\frac{x}{y}) = (\frac{1}{0}) + \tau(-\frac{1}{8})$ .

53. a. Zie figuur 15.13.  $\vec{AB} = \underline{b} - \underline{a} = (-\frac{4}{3})$ , dus een normaalvector van  $AB$  is  $\underline{n} = (\frac{3}{4})$ . Dus de lijn  $l_{AB}$  heeft als normaalvorm  $\underline{n} \cdot \underline{x} = \underline{n} \cdot \underline{b}$ , oftewel  $3x + 4y = 16$ .

Met (4.4) bereken je de afstand van  $C$  tot  $AB$ :

$$d(C, l_{AB}) = \frac{|3 \cdot -1 + 4 \cdot -3 - 16|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{31}{5} = 6\frac{1}{5}.$$

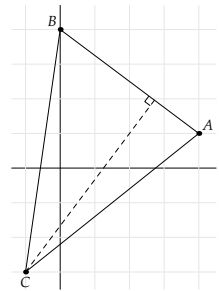
- b. De lengte van  $AB$  is 5 (zie vorige onderdeel), de oppervlakte van de driehoek is  $\frac{1}{2} \cdot AB \cdot h_C = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6\frac{1}{5} = 15\frac{1}{2}$

- c. Er geldt  $BD \parallel AC$ , dus de afstand van  $D$  tot  $AC$  is gelijk aan de afstand van  $B$  tot  $AC$ .

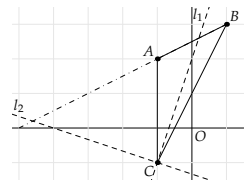
Analoog aan de methode van onderdeel a vind je:

$$l_{AC}: 4x - 5y = 11, \text{ en dus } d(B, l_{AC}) = \frac{31}{\sqrt{41}}.$$

54. Zie figuur 15.14. Een richtingsvector van  $AB$  is  $r_{AB} = \underline{b} - \underline{a} = (\frac{2}{1})$ . Stel dat  $p$  de richtingscoëfficiënt is van de lijn door  $C$  die een hoek van  $45^\circ$  maakt met  $AB$ , dan is  $r_C = (\frac{1}{p})$  een



Figuur 15.13: De lengte van de hoogtelijn vanuit  $C$  is de afstand van  $C$  tot  $AB$



Figuur 15.14: Twee lijnen door  $C$  die een hoek van  $45^\circ$  maken met  $AB$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

145.

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} -\frac{1}{2} \\ \left( \begin{array}{ccc} -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{array} \right) \end{array} & \xrightarrow{v} & \begin{array}{c} -\frac{1}{2} \\ \left( \begin{array}{ccc} -2 & 0 & -15 \\ 0 & -5 & 0 \\ 3 & 0 & -10 \end{array} \right) \end{array} \\ \\ \begin{array}{c} -3 \quad + \\ \downarrow \quad \downarrow \\ \left( \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3/2 & 0 & 2 \end{array} \right) \end{array} & \xrightarrow{v} & \begin{array}{c} -3 \quad + \\ \downarrow \quad \downarrow \\ \left( \begin{array}{ccc} 1 & 0 & -15 \\ 0 & -5 & 0 \\ -3/2 & 0 & -10 \end{array} \right) \end{array} \\ \\ \begin{array}{c} \frac{2}{13} \\ \left( \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3/2 & 0 & 13/2 \end{array} \right) \end{array} & \xrightarrow{v} & \begin{array}{c} \frac{2}{13} \\ \left( \begin{array}{ccc} 1 & 0 & -18 \\ 0 & -5 & 0 \\ -3/2 & 0 & -11/2 \end{array} \right) \end{array} \\ \\ \begin{array}{c} + \quad \frac{3}{2} \\ \downarrow \quad \downarrow \\ \left( \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3/2 & 0 & 1 \end{array} \right) \end{array} & \xrightarrow{v} & \begin{array}{c} + \quad \frac{3}{2} \\ \downarrow \quad \downarrow \\ \left( \begin{array}{ccc} 1 & 0 & -36/13 \\ 0 & -5 & 0 \\ -3/2 & 0 & -11/13 \end{array} \right) \end{array} \\ \\ \left( \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) & \xrightarrow{v} & \left( \begin{array}{ccc} -41/13 & 0 & -36/13 \\ 0 & -5 & 0 \\ -36/13 & 0 & -11/13 \end{array} \right) \end{array}$$

En rechts staat de gevraagde matrix.

146. De afbeeldingsmatrix is  $\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ .

147. Stel  $\underline{p} = \overrightarrow{OP}$  en  $\underline{q} = \overrightarrow{OQ}$ . Omdat  $P$  en  $Q$  op een lijn door  $O$  liggen is er een  $\alpha \in \mathbb{R}$  waarvoor geldt:  $\underline{p} = \alpha \underline{q}$ . Dus voor het beeld  $f(\underline{p})$  geldt:  $f(\underline{p}) = f(\alpha \underline{q}) = \alpha f(\underline{q})$ , omdat  $f$  lineair is. Dus het beeld  $f(\underline{p})$  en het beeld  $f(\underline{q})$  liggen ook op een lijn door  $O$ .

148. Voor de snijpunten met de  $x_1$ -as geldt dat  $x_2 = 0$ . Voor  $l$  is dat het geval als  $\lambda = -2$ , en voor  $m$  als  $\mu = 0$ . Voor deze waarden



# Index

- aangevulde matrix, 33
- afbeelding
  - bijjectief, 164
  - injectief, 163
  - lineair, 124
  - matrix, 116
  - product, 160
  - samengestelde, 158
  - surjectief, 163
- afbeeldingsvergelijking, 130
- afhankelijk, 72, 82, 141, 142
- afhankelijke vectoren, 42
- afstand
  - punt en lijn in  $\mathbb{R}^3$ , 101
  - punt en vlak, 101
  - punt tot lijn, 61
  - tussen twee punten in  $\mathbb{R}^2$ , 48
  - tussen twee punten in  $\mathbb{R}^3$ , 71
  - twee kruisende lijnen, 102
  - twee punten in  $\mathbb{R}^3$ , 101
- associatief, 17
  
- basis, 80, 141, 142
- basisvector, 80, 141
- beeld, 116
  - eenheidsvector, 121
- beeldruimte, 156
- bekende term, 33
- bijjectie, 164
- bissectrice, 66
  
- cirkel
  - ingeschreven, 67
  - omgeschreven, 65
  
- coëfficiënt, 33
- coëfficiëntenmatrix, 33
- coördinaatvlakken, 79
- commutatief, 16, 161
- component, 15
- computer graphics, 172
- cosinusregel, 49
  
- deellijn, 66
- determinant, 39, 82, 139
  - $3 \times 3$ , 140
  - notatie, 140
- distributieve eigenschappen, 21
- distributiviteit, 114
  
- echelonvorm, 36
- eenheidsmatrix, 122
- eenheidsvector, 80
  - beeld, 121
- eerste octant, 92
- element, 109
  
- Gauss-eliminatie, 36
- getransponeerde, 115
- gonioformules, 161
- Griekse letters, 235
  
- hoek
  - in  $\mathbb{R}^2$ , 49
  - in  $\mathbb{R}^3$ , 71
  - tussen lijn en vlak, 100
  - tussen twee lijnen in  $\mathbb{R}^3$ , 99
  - tussen twee vlakken, 99
- homogene coördinaten, 173
- hoofddiagonaal, 122
- hoogtelijn, 65
  
- hoogtepunt, 66, 68
  
- $\text{Im } f$ , 156
- ingeschreven cirkel, 67
- injectie, 163
- injectief, 163
- injectieve afbeelding, 163
- inkoopkosten, 113
- inproduct, 51, 111
- inverse, 164, 165, 168
- inwendig product, 51
  
- kental, 15
- ker  $f$ , 153
- kern, 153
- kolom, 33, 109
- kolomvector, 110
- kop-staartmethode, 17
- kruisende lijnen, 75
  
- lengte
  - in  $\mathbb{R}^2$ , 47
  - in  $\mathbb{R}^3$ , 70
- lijn
  - algemene vergelijking, 25
  - door  $P$ , 25
  - evenwijdige, 38, 41
  - normaalvorm, 25, 52
  - richtingsvector, 23
  - samenvallende, 38, 41
  - snijdende, 38
  - snijpunt, 42
  - steunvector, 24
  - vectorvoorstelling, 23
- lineaire afbeelding, 124
  - overzicht, 132
- lineaire combinatie, 80, 141, 142, 156

- lineaire ruimte, 21, 23
- loodrecht, 51, 72
- loodrechte projectie, 61
- magisch vierkant, 22
- magische constante, 22
- matrix, 33, 109
  - aangevulde, 33
  - afbeelding, 116
  - echelonvorm, 36
  - inverse, 165, 168
  - kolom, 33
  - lineaire afbeelding, 124
  - online berekenen, 118
  - optellen, 110
  - product, 111, 159
  - rij, 33
  - scalaire vermenigvuldiging, 115
  - vermenigvuldigen, 111
  - vierkante, 109, 113
- matrixafbeelding, 116
- middelloodlijn, 65
- neutrale element, 18
- nevendiagonaal, 122
- niet-singulier, 166
- normaalvector, 53
  - vlak, 89
- normaalvorm
  - van lijn, 25, 52
  - van lijn door punt, 55
  - van vlak door punt, 91
- nulmatrix, 156
- nulrij, 180
- nulvector, 18, 47, 153
- omgeschreven cirkel, 65
- onafhankelijk, 72, 82, 83, 141
- online matrixberekening, 118
- optellen
  - matrix, 110
- origineel, 116
  - volledig, 154
- parallellogramconstructie, 17
- pijl, 15
- plaatsvector, 15
- productafbeelding, 160
- projectie
  - punt op lijn, 61
- quickmath.com, 118
- rechtshandig assenstelsel, 69
- regulier, 166
- richtingscoëfficiënt, 23
- richtingsvector, 23
  - vlak, 84
- rij, 33, 109
- rijvector, 110, 115
- rotatie
  - om de oorsprong, 126
- rotatiematrix, 137, 161
- samengestelde afbeelding, 158
- scalair, 21, 51
- scalair product, 51
- scalaire vermenigvuldiging, 20, 115
- scalar, 21, 51
- singulier, 166
- snijdende lijnen, 74
- snijpunt
  - lijn en vlak, 86
- snijpunt twee lijnen, 42
- stelsel
  - lineaire vergelijkingen, 123
  - oplossen, 139, 171
  - strijdig, 76
  - vegen, 32
- stereosignaal, 83
- steunpunt, 25
- steunvector, 24
  - vlak, 84
- strijdig stelsel, 76
- surjectie, 163
- surjectief, 163
- surjectieve afbeelding, 163
- tegengestelde, 18
- tekenen
  - vlak, 92
- toepassing
  - computer graphics, 172
  - gonioformules, 161
  - inkoopkosten, 113
  - magisch vierkant, 22
  - stereosignaal, 83
  - voorraadmatrijs, 110
- transponeren, 115
- uitwerkingen, 177
- vector, 15
  - afhankelijk, 42, 82, 141
  - als matrix, 114
  - getransponeerde, 115
  - hoek met andere vector in  $\mathbb{R}^2$ , 49
  - hoek met andere vector in  $\mathbb{R}^3$ , 71
  - in  $\mathbb{R}^3$ , 69
  - inproduct, 51
  - lengte in  $\mathbb{R}^2$ , 47
  - lengte in  $\mathbb{R}^3$ , 70
  - loodrecht, 51, 72
  - onafhankelijk, 82, 141
  - optellen, 16
  - vrije, 15
- vectorruimte, 21, 23
- vectorvoorstelling
  - van lijn in  $\mathbb{R}^2$ , 23
  - van lijn in  $\mathbb{R}^3$ , 74
  - van lijn naar vergelijking, 28

- van vlak naar vergelijking, 91
- vlak, 83
- vegen, 32
  - kolommen, 144
- vergelijking van lijn, 25
  - door  $O$ , 53
  - door  $P$ , 55
  - naar vectorvoorstelling, 27
  - normaalvorm, 25, 52
- vergelijking van vlak
  - door  $O$ , 90
  - door  $P$ , 91
- vermenigvuldiging
  - matrix, 111
  - scalair, 20
  - t.o.v.  $O$ , 132
  - t.o.v.  $x_1$ -as, 132
  - t.o.v. lijn, 146, 148
  - t.o.v. vlak, 130
- vierkante matrix, 109, 113
- vlak
  - $xy$ -, 79
  - $xz$ -, 79
  - $yz$ -, 79
  - normaalvector, 89
  - normaalvorm, 91
  - richtingsvector, 84
  - snijpunt met lijn, 86
- steunvector, 84
- tekenen, 92
- vectorvoorstelling, 83
- vergelijking, 91
- vlak door  $O$ 
  - vergelijking, 90, 91
- volledig origineel, 154
- voorraadmatrix, 110
- voortbrengen, 80, 141
- vrije vector, 15
- wolframalpha.com, 119
- zwaartelij, 64
- zwaartepunt, 64