

GERTJAN LAAN

ANALYSEBOEK

UITGEVERIJ CZARINA

Copyright © 2017 Gertjan Laan
Versie 3.1

UITGEVERIJ CZARINA
www.uitgeverijczarina.nl
www.gertjanlaan.nl

tufte-latex.github.io/tufte-latex
DRUK: PUMBO.NL

ISBN 978 94 92481 02 3
NUR 123

Gedrukt in oktober 2017

Niets uit deze uitgave mag worden verveelvoudigd, door middel van druk, fotokopieën, geautomatiseerde gegevensbestanden of op welke andere wijze ook zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de uitgever.

Inhoudsopgave

1	Getallen	15
	Natuurlijke getallen	15
	Gehele getallen	17
	Even en oneven getallen	18
	Rationale getallen	19
	Van gewone breuk naar decimale	20
	Van decimale naar gewone breuk	22
	Irrationale getallen en reële getallen	24
	Eigenschappen van reële getallen	27
	Rekenen met breuken	27
	De ggd	30
	Het kgv	33
	Opgaven	34
	Ongelijkheden	36
	Intervallen	38
	Omgeving	40
	Absolute waarde en afstand	41
	Machten	44
	Eigenschappen van machten	47
	Wortels	48
	Wortels in standaardvorm	49
	Vermenigvuldigen door optellen	50
	Logaritmen	51
	Een iets andere kijk op de logaritme	54
	Een paar eigenschappen van logaritmen	54
	Overgang op een ander grondtal	57
	Opgaven	59
2	Capita selecta	63

	<i>Sigma-notatie</i> Σ	63
	<i>Coördinaten</i>	65
	<i>Afstand tussen twee punten</i>	66
	<i>Volledige inductie</i>	67
	<i>Binomium van Newton</i>	69
	<i>Driehoek van Pascal</i>	71
	<i>Rijen</i>	72
	<i>Rekenkundige rijen</i>	72
	<i>Over de nummering van de termen</i>	74
	<i>De som van een rekenkundige rij</i>	75
	<i>Meetkundige rijen</i>	76
	<i>De som van een meetkundige rij</i>	77
	<i>Verschilrijen</i>	78
	<i>Binaire getallen</i>	79
	<i>De som van twee binaire getallen</i>	82
	<i>Opgaven</i>	83
3	<i>Veeltermen en rationale functies</i>	87
	<i>Kwadratische functies</i>	89
	<i>Translaties van $y = x^2$</i>	90
	<i>De nulpunten uit de topvorm</i>	92
	<i>Kwadraatafsplitsen</i>	93
	<i>Kwadraatafsplitsen bij de algemene vorm</i>	96
	<i>De abc-formule</i>	97
	<i>Symmetrieas</i>	99
	<i>Classificatie van tweedegraadsfuncties</i>	100
	<i>De nulpuntenvorm</i>	101
	<i>Opgaven</i>	103
	<i>Lineaire functies</i>	105
	<i>Vergelijking van een lijn bepalen</i>	107
	<i>Vergelijking van een lijn door twee punten</i>	108
	<i>Een verticale lijn</i>	109
	<i>Opgaven</i>	110
	<i>Polynomen</i>	111
	<i>Rationale functies</i>	113

	<i>Staartdeling met polynomen</i>	115
	<i>De reststelling en de factorstelling</i>	118
	<i>Het schema van Horner</i>	120
	<i>Synthetisch delen</i>	123
	<i>Rationale wortels</i>	125
	<i>Opgaven</i>	128
4	<i>Andere standaardfuncties</i>	129
	<i>Goniometrische functies</i>	129
	<i>Hoeken, graden en radialen</i>	129
	<i>Radialen en opperolakte</i>	131
	<i>Sinus, cosinus en tangens</i>	131
	<i>Waar is de tangens?</i>	135
	<i>De grafiek van de sinus</i>	136
	<i>Oneven functie</i>	138
	<i>De grafiek van de cosinus</i>	138
	<i>Even functie</i>	139
	<i>De grafiek van de tangens</i>	139
	<i>Veelgebruikte goniometrische waarden</i>	140
	<i>Opgaven</i>	142
	<i>Goniometrische formules</i>	142
	<i>Opgaven</i>	148
	<i>Exponentiële functies</i>	149
	<i>Het getal e</i>	150
	<i>Som, verschil, product en quotiënt</i>	151
	<i>Samengestelde functie</i>	152
	<i>Inverse functies</i>	153
	<i>Inverse van een lineaire functie</i>	155
	<i>De grafiek van de inverse functie</i>	156
	<i>De inverse van $y = x^2$: de wortelfunctie</i>	158
	<i>De inverse van $y = x^n$</i>	159
	<i>De cyclometrische functies</i>	159
	<i>De inverse sinus: de arcsinus</i>	159
	<i>De inverse cosinus: de arccosinus</i>	161
	<i>De inverse tangens: de arctangens</i>	162

	<i>Inverse exponentiële functies: logaritmen</i>	162
	<i>Samenvatting inverse functies</i>	163
	<i>Logaritmisch papier</i>	164
	<i>De absolute waarde</i>	166
	<i>De signumfunctie</i>	167
	<i>De entier of floor</i>	168
	<i>Verschuiven en vervormen</i>	169
	<i>Opgaven</i>	171
5	<i>Limieten</i>	175
	<i>De linker- en rechterlimiet van een functie</i>	175
	<i>De limiet in een punt</i>	179
	<i>De ϵ-δ-definitie van de limiet</i>	180
	<i>Eigenschappen van limieten</i>	184
	<i>Continuïteit</i>	186
	<i>Continue functies</i>	188
	<i>Overzicht limieten en continuïteit</i>	192
	<i>Oneigenlijke limieten</i>	193
	<i>Verticale asymptoot</i>	194
	<i>Eigenschappen oneigenlijke limieten</i>	196
	<i>Opgaven</i>	197
	<i>Horizontale asymptoot</i>	200
	<i>Eigenschappen van limieten met $x \rightarrow \pm\infty$</i>	202
	<i>Scheve asymptoot</i>	204
	<i>Alternatieve manier om scheve asymptoot te bepalen</i>	205
	<i>Opgaven</i>	207
	<i>Standaardlimieten</i>	208
	<i>De standaardlimiet $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$</i>	209
	<i>Gevolgen van $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$</i>	211
	<i>De standaardlimiet $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$</i>	212
	<i>De standaardlimiet $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$</i>	213
	<i>De standaardlimiet $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$</i>	214
	<i>De standaardlimiet $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^p} = 0$</i>	214
	<i>De standaardlimiet $\lim_{x \downarrow 0} x^p \ln x = 0$</i>	215
	<i>De standaardlimiet $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^p}{e^x} = 0$</i>	216

	De standaardlimiet $\lim_{x \rightarrow -\infty} x ^p e^x = 0$	217
	De standaardlimiet $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$	217
	Opgaven	218
6	Afgeleiden	221
	Het differentie- en het differentiaalquotiënt	221
	De afgeleide van $f(x) = x^3$	225
	De afgeleide van $f(x) = x^n$, $x \in \mathbb{N}$	226
	De grafiek van f en van zijn afgeleide f'	227
	Differentieerbaarheid	228
	Differentieerbaarheid en continuïteit	231
	Regels voor de afgeleide	231
	De scalairregel	232
	De somregel	232
	De productregel	233
	Notaties voor de afgeleide	235
	De quotiëntregel	236
	Opgaven	239
	De kettingregel	241
	De afgeleide van de sinus	243
	De afgeleide van de cosinus	244
	De afgeleide van de tangens	245
	De afgeleide van x^r , $r \in \mathbb{Q}$	246
	Nogmaals $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$	246
	De afgeleide van e^x	247
	Maxima en minima, kritisch punt	248
	Extreme waarde en differentieerbaarheid	249
	Horizontaal buigpunt	250
	De tweede afgeleide f''	251
	Opgaven	253
	De inverse functiestelling	255
	Afgeleide van inverse goniometrische functies	257
	De afgeleide van $\ln x$	259
	De afgeleide van $\ln x $	260

	<i>Samenvatting afgeleiden</i>	261
	<i>Opgaven</i>	263
7	<i>Toepassingen afgeleiden</i>	265
	<i> Functieonderzoek</i>	265
	<i> Differentialen</i>	270
	<i> Lineaire benadering met differentialen</i>	273
	<i> Optimaliseringsproblemen</i>	274
	<i> Opgaven</i>	277
8	<i>Integralen</i>	281
	<i> Benadering van een oppervlakte</i>	281
	<i> Een andere benadering</i>	282
	<i> De middensom</i>	285
	<i> Meer rechthoeken</i>	286
	<i> De Riemannsomsom</i>	286
	<i> Integreerbare functies</i>	288
	<i> Opgaven</i>	295
	<i> De oppervlakte onder en boven de x-as</i>	296
	<i> De oppervlakte tussen twee grafieken</i>	297
	<i> Eigenschappen van integralen</i>	301
	<i> Toepassing: snelheid en afgelegde weg</i>	302
	<i> Toepassing: gemiddelde functiewaarde</i>	304
	<i> Bepaalde en onbepaalde integraal</i>	306
	<i> Standaardprimitieven</i>	306
	<i> Opgaven</i>	308
	<i> De substitutiemethode</i>	309
	<i> Andere substituties</i>	312
	<i> Substitutie bij een bepaalde integraal</i>	314
	<i> Opgaven</i>	317
	<i> Partieel integreren</i>	318
	<i> Differentialen en integreren</i>	319
	<i> Differentialen en partieel integreren</i>	320
	<i> De primitieven van de cyclometrische functies</i>	323

<i>Lijst van primitieven</i>	325
<i>Opgaven</i>	326
<i>Breuksplitsen</i>	327
<i>Breuksplitsen: snelle methode</i>	329
<i>Integreren van rationale functies</i>	331
<i>Opgaven</i>	335
<i>Oneigenlijke integralen</i>	335
<i>Oneigenlijke integralen: soort 1</i>	336
<i>Oneigenlijke integralen: soort 2</i>	339
<i>Opgaven</i>	342
<i>Grieks alfabet</i>	345
<i>Index</i>	347

1

Getallen

Z_E zijn ons zo vertrouwd uit het dagelijks leven, dat we vaak niet stilstaan bij de wonderbaarlijke eigenschappen van de uitvinding die we *getallen* noemen. Binnen de wiskunde bestaat een richting, getaltheorie, die zich uitsluitend met getallen en hun eigenschappen bezighoudt. Een andere richting, algebra, gebruikt de eigenschappen van getallen om talloze wiskundige structuren te scheppen. Het vak analyse, waar dit boek over gaat, bestudeert functies, en dan vooral het gedrag van functies als we met getallen heel kleine ('oneindig kleine') stapjes nemen. Functies zijn, losjes geformuleerd, voorschriften die bij een getal een tweede getal aanwijzen. Vanaf hoofdstuk 3 komen functies uitvoerig aan bod. In dit en het volgende hoofdstuk spelen getallen de hoofdrol.

Een goed getalbegrip is noodzakelijk om de stellingen, afleidingen en toepassingen van de analyse te kunnen volgen en waarderen. Laten we eens kijken wat we zoal van getallen weten, en van de vier elementaire bewerkingen op getallen: optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen.

1.1 *Natuurlijke getallen*

Het blijkt handig te zijn onderscheid te maken tussen verschillende soorten getallen in diverse getalverzamelingen. Om te beginnen de *natuurlijke* getallen, die we aanduiden met het symbool \mathbb{N} :

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

In sommige boeken of artikelen behoort 0 niet tot de verzameling \mathbb{N} , maar in dit boek wel. De verzameling natuurlijke

getallen zonder nul geef ik aan met \mathbb{N}^+ :

$$\mathbb{N}^+ = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

Welke eigenschappen heeft deze getallenverzameling? Merk op dat \mathbb{N} *gesloten* is voor de optelling: als je twee willekeurige natuurlijke getallen bij elkaar optelt krijg je weer een natuurlijk getal, anders gezegd:

$$\text{voor alle } a, b \text{ in } \mathbb{N} \text{ geldt: } a + b \text{ is een element van } \mathbb{N} \quad (1.1)$$

Voor de woorden 'voor alle' kennen we het symbool \forall , het woord 'geldt' wordt vaak weggelaten. En \in is een symbool voor 'in', of voor 'is een element van'. Dus (1.1) kun je schrijven als:

$$\forall a, b \in \mathbb{N} : a + b \in \mathbb{N} \quad (1.2)$$

Een uitdrukking waarin elementen bij elkaar worden opgeteld, of het resultaat daarvan, heet een *optelling* of ook wel een *som*. De elementen die je bij elkaar optelt heten *termen*. De volgorde waarin je de termen van een optelling zet, maakt voor het resultaat niet uit: $3 + 5$ is hetzelfde als $5 + 3$, algemeen:

$$\forall a, b \in \mathbb{N} : a + b = b + a \quad (1.3)$$

Deze eigenschap heet *commutativiteit* van de optelling.

Een uitdrukking waarin je elementen met elkaar vermenigvuldigt, of het resultaat daarvan, heet een *vermenigvuldiging* of een *product*. De elementen die je met elkaar vermenigvuldigt heten *factoren*. Er zijn verschillende notaties voor de vermenigvuldiging: onder andere met een \times of met een punt:

$$3 \times 5$$

$$3 \cdot 5$$

$$a \cdot b$$

$$ab$$

Tussen letters onderling, en tussen factoren en haakjes, laat je de punt vaak weg, zoals in ab of in $3(5 + 6)$. Tussen getallen onderling kan dat natuurlijk niet.

Het woord *som* heeft, vooral op scholen, ook de meer algemene betekenis van (*reken*)opgave.

Net als de optelling is de vermenigvuldiging commutatief. Dat wil zeggen dat de volgorde waarin je de factoren van een vermenigvuldiging zet, voor het resultaat niet uitmaakt: $3 \cdot 5$ is hetzelfde als $5 \cdot 3$. Dus

$$\forall a, b \in \mathbb{N} : ab = ba \quad (1.4)$$

Verder geldt dat de verzameling \mathbb{N} gesloten is voor de vermenigvuldiging. Dus

$$\forall a, b \in \mathbb{N} : ab \in \mathbb{N} \quad (1.5)$$

Een andere eigenschap is *associativiteit*:

$$\forall a, b, c \in \mathbb{N} : (a + b) + c = a + (b + c) \quad (1.6)$$

en ook:

$$\forall a, b, c \in \mathbb{N} : (ab)c = a(bc) \quad (1.7)$$

Associativiteit wil zeggen dat het niet uitmaakt of je eerst a en b bij elkaar neemt (en dan bij het resultaat c), of dat je eerst b en c bij elkaar neemt (en dat resultaat bij a).

\mathbb{N} is weliswaar gesloten voor $+$ en \cdot , feit is dat de verzameling \mathbb{N} *niet gesloten* is voor de *afrekking* of het *verschil*: het resultaat van $5 - 3$ is een element van \mathbb{N} , maar het resultaat van $3 - 5$ is dat niet. Voor 'is geen element van' gebruiken we het symbool \notin . Dus $5 - 3 \in \mathbb{N}$, en $3 - 5 \notin \mathbb{N}$. Uit dit voorbeeld blijkt ook dat de afrekking *niet* commutatief is, immers $5 - 3 \neq 3 - 5$.

Voor de *deling* of het *quotiënt* gebruiken we soms het symbool \div , bijvoorbeeld $3 \div 5$, of een horizontale deelstreep als in $\frac{3}{5}$ of een schuine deelstreep als in $\frac{3}{5}$.

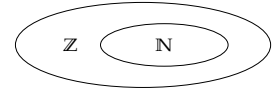
\mathbb{N} is niet gesloten voor de deling, zo is $3 \div 5 \notin \mathbb{N}$. De deling is ook niet commutatief, er geldt bijvoorbeeld: $1 \div 3 \neq 3 \div 1$.

1.2 Gehele getallen

Uitbreiding van \mathbb{N} met negatieve getallen leidt tot de verzameling van de *gehele* getallen. Deze verzameling geven we aan met

het symbool \mathbb{Z} :

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$



Figuur 1.1: De verzamelingen \mathbb{N} en \mathbb{Z}

De letter Z komt van het Duitse woord *Zahlen* voor gehele getallen. Alle getallen uit \mathbb{N} zijn ook element van \mathbb{Z} , zie figuur 1.1.

Als een getal a groter dan 0 is, zeggen we dat a positief is, en schrijven $a > 0$. Als een getal a kleiner dan 0 is, noemen we dat getal negatief, en schrijven $a < 0$.

In tabel 1.1 zie je een overzicht van het al of niet gesloten zijn voor een bepaalde bewerking van de verzamelingen \mathbb{N} en \mathbb{Z} .

Tabel 1.1: Gesloten of niet?

GESLOTEN?	OP- TELLING	VERMENIG- VULDIGING	AF- TREKKING	DELING (niet door nul)
\mathbb{N}	ja	ja	nee	nee
\mathbb{Z}	ja	ja	ja	nee

\mathbb{Z} is niet alleen gesloten voor de optelling, maar ook voor de aftrekking. En zowel \mathbb{N} als \mathbb{Z} zijn gesloten voor de vermenigvuldiging, maar niet voor de deling. Het delen van twee gehele getallen leidt tot een nieuwe soort: de rationale getallen, zie paragraaf 1.4.

1.3 Even en oneven getallen

Vaak werk je met een gedeelte van \mathbb{N} of \mathbb{Z} (of van een andere getalverzameling). Een voorbeeld is de verzameling van even getallen, die een deelverzameling vormen van \mathbb{Z} : $Even = \{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots\}$. Wat formeler opgeschreven:

$$Even = \{n \mid n = 2k, k \in \mathbb{Z}\} \tag{1.8}$$

Het streepje \mid heeft in deze notatie de betekenis van *met de eigenschap dat*. Je moet de verzamelingennotatie in (1.8) dus lezen als: de verzameling die *Even* heet, bestaat uit alle getallen n met de eigenschap dat n gelijk is aan $2k$, waarbij k een element van \mathbb{Z}

Een wijze van noteren als in (1.8) of (1.9) heet *verzamelingennotatie*.

is. Als je alleen maar positieve even getallen wilt, vervang je in deze definitie \mathbb{Z} door \mathbb{N}^+ .

Ook de oneven getallen kun je vastleggen met behulp van verzamelingennotatie, bijvoorbeeld zo:

$$\text{Oneven} = \{n \mid n = 2k + 1, k \in \mathbb{Z}\} \quad (1.9)$$

In plaats van $2k + 1$ kun je (bijvoorbeeld) ook $2k - 1$ gebruiken.

1.4 Rationale getallen

De verzameling rationale getallen (of *breuken*) bestaat uit alle getallen r die de volgende vorm hebben:

$$r = \frac{a}{b}, \text{ waarbij } a \text{ en } b \text{ gehele getallen zijn en } b \neq 0$$

Deze verzameling duiden we aan met het symbool \mathbb{Q} . De verzameling bestaat uit breuken, de letter \mathbb{Q} staat voor *quotiënt*. Met verzamelingennotatie schrijf je \mathbb{Q} als volgt:

$$\mathbb{Q} = \{r \mid r = \frac{a}{b}, \text{ met } a, b \in \mathbb{Z} \text{ en } b \neq 0\}$$

Dit betekent dat \mathbb{Q} bestaat uit getallen als

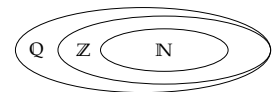
$$\frac{1}{3}, \quad \frac{-2}{57}, \quad 12 = \frac{12}{1}, \quad 0.35 = \frac{35}{100}$$

Alle getallen uit \mathbb{Z} (en dus ook uit \mathbb{N}) zijn element van \mathbb{Q} , zie figuur 1.2.

Bijzonder is, dat we in het dagelijks leven twee essentieel verschillende notaties gebruiken voor breuken. Enerzijds gebruiken we $\frac{1}{2}$ of $1/2$ en soms ook $1 \div 2$ voor een half, anderzijds gebruiken we ook 0.5. We noteren de getallen van \mathbb{Q} dus als gewone breuk, meestal in de vorm $\frac{a}{b}$, en als breuk met een decimale punt.

Een vraag die zich opdringt is nu, of je alle gewone breuken als decimale breuk kunt schrijven, en omgekeerd, of je elke decimale breuk in de vorm $\frac{a}{b}$ kunt schrijven.

De juiste term is *rationaal*. Een ander woord is *rationeel*, dat redelijk betekent.



Figuur 1.2: De verzamelingen \mathbb{N} , \mathbb{Z} en \mathbb{Q}

In dit boek schrijf ik decimale breuken met een punt, en niet met een komma. Dit sluit aan bij het gebruik van rekenmachines en online hulpmiddelen, en voorkomt dubbelzinnigheden bij onder andere de notatie van intervallen, zie ook paragraaf 1.14.

1.5 Van gewone breuk naar decimale

Breuken van de vorm $\frac{a}{b}$ kun je, soms met enige moeite, als decimale breuk schrijven. Er geldt $\frac{1}{2} = 0.5$, en $\frac{1}{5} = 0.2$. Twee eindige decimale breuken.

Verder geldt bijvoorbeeld: $\frac{1}{3} = 0.3333\dots$. Deze laatste breuk is *repetierend*, het aantal drieën is oneindig groot. Met een streep boven het cijfer (of een groepje cijfers) kun je aangeven dat dat cijfer (of dat groepje) repeteert:

$$\frac{1}{3} = 0.3333\dots = 0.\overline{3}$$

Evenzo is:

$$0.456456456\dots = 0.\overline{456}$$

Uit het volgende blijkt dat je elke breuk van de vorm $\frac{a}{b}$ kunt omzetten in een decimale breuk.

Voorbeeld 1.1. Schrijf $\frac{1}{7}$ als decimale breuk.

Oplossing. Voer een staartdeling uit tot je een rest vindt die al eerder is voorgekomen:

$$\begin{array}{r} 7 \ / \ 1.000000 \ \backslash \ 0.142857 \ \dots \\ \underline{0.7} \\ 30 \\ \underline{28} \\ 20 \\ \underline{14} \\ 60 \\ \underline{56} \\ 40 \\ \underline{35} \\ 50 \\ \underline{49} \\ 1 \end{array}$$

De laatste rest is 1, dat was ook het getal waarmee de deling begon, vanaf hier gaat het antwoord repeteren. Dus $\frac{1}{7} = 0.\overline{142857}$.

DISME:
The Art of Tenths,
OR
Decimall Arithmetike,
Teaching how to performe all Computations
whatsoever, by whole Numbers without
Fractions, by the foure Principles of
Common Arithmeticke: namely, Ad-
dition, Substraction, Multiplication,
and Division.
Invented by the excellent Mathematician,
Simon Stevin.
Published in English with some additions
by Robert Norton, Gent.



Imprinted at London by S. S. for Hugh
Astley, and are to be sold at his shop at
Saint Magnus corner. 1608.

Figuur 1.3: Voorblad van de Engelse vertaling uit 1608 van het boek *De Thiende* van Simon Stevin. Hij gaf dit boek oorspronkelijk uit in het Nederlands en Frans in 1585 om het gebruik van decimale breuken (de thienden) te bevorderen. Hij droeg het boek onder anderen op aan sterrenkijkers, landmeters, wijnmeters, muntmeesters en alle kooplieden. Het zou nog twee eeuwen duren voor het gebruik van decimale breuken was ingeburgerd.

3.16 Polynomen

De algemene vorm van een polynoom (veelterm) van graad $n \in \mathbb{N}$ is:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0$$

Hierin zijn de coëfficiënten a_i reële getallen voor $i = 0 \dots n$. Het getal a_n heet de *kopcoëfficiënt*, en a_0 heet de *constante term*.

Definitie 3.17. De *graad* van een polynoom $p(x)$ is de hoogste macht van x die in de veelterm voorkomt. Notatie: $gr(p)$. ■

Een paar voorbeelden van polynomen:

- elke constante functie $\neq 0$ is een polynoom van graad 0, bijvoorbeeld $f(x) = 3$,
- elke lineaire functie is een polynoom van graad één, bijvoorbeeld: $f(x) = 3x + 1$,
- elke kwadratische functie is een veelterm van graad twee, zoals $f(x) = 3x^2 + 2x - 1$.

Het *nulpolynoom* $0(x)$ is de veelterm waarvan alle coëfficiënten 0 zijn, dus $0(x) = 0$. De graad van het nulpolynoom is niet gedefinieerd.

Een paar voorbeelden van veeltermen van hogere graad:

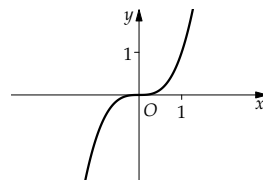
- derdegraads, zoals $f(x) = 3x^3 - x^2 + 4x - 5$
- vierdegraads, zoals $g(x) = x^4 + 2x - 1$
- vijfdegraads, zoals $h(x) = -2x^5 - 3x^4 + x^3 - 7$
- et cetera

De standaard derdegraadsfunctie is $f(x) = x^3$. In figuur 3.14 zie je zijn grafiek.

Elke derdegraadsfunctie heeft één, twee of drie nulpunten, in figuur 3.15 zie je drie mogelijke varianten.

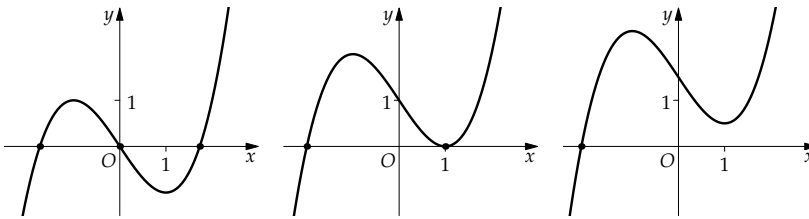
Dat een derdegraadsfunctie altijd minstens één nulpunt heeft, komt doordat voor heel grote positieve of negatieve waarden

De graad van het nulpolynoom wordt ook wel als $-\infty$ gedefinieerd, om te voorkomen dat in stellingen over polynomen het nulpolynoom een uitzondering vormt.



Figuur 3.14: Grafiek van $f(x) = x^3$

van x de waarde van de hoogste macht, in dit geval x^3 , gaat overheersen.

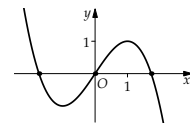


Figuur 3.15: Drie derdegraadsfuncties met drie, twee of een nulpunt(en)

Neem als voorbeeld de functie $f(x) = 3x^3 - x^2 + 4x - 5$:

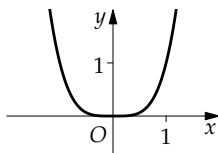
- voor heel grote positieve waarden van x zal de term $3x^3$ gaan overheersen, en $f(x)$ heel grote positieve waarden aannemen
- voor heel grote negatieve waarden van x zorgt $3x^3$ ervoor dat ook $f(x)$ heel grote negatieve waarden aanneemt
- gaande van links naar rechts op de x -as gaan de functiewaarden dus van negatief naar positief, ergens moet de x -as gesneden worden: een nulpunt. Het is niet heel eenvoudig dit precies te bewijzen, in hoofdstuk 5 introduceer ik begrippen als *limieten* en *continuïteit* om hierover op een wat formelere manier te kunnen praten.

Als een derdegraadsveelterm een negatieve kopcoëfficiënt heeft zijn de y -waarden juist positief voor zeer negatieve x , en de y -waarden zijn negatief voor grote positieve x , zoals in figuur 3.16.



Figuur 3.16: Derdegraadsfunctie met negatieve kopcoëfficiënt

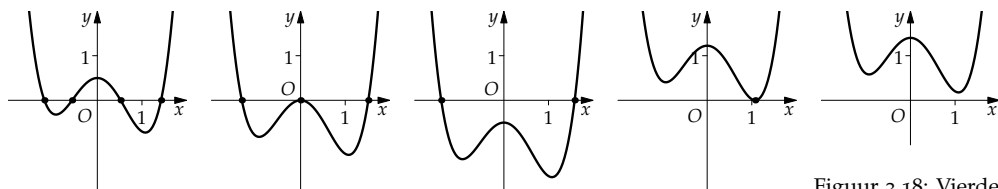
De standaard vierdegraadsfunctie heeft een grafiek die enigszins lijkt op een parabool, zij het wat afgeplat bij de top, zie figuur 3.17.



Figuur 3.17: De grafiek van $f(x) = x^4$

De functie $f(x) = x^4$ heeft alleen een nulpunt bij $x = 0$. In het

algemeen kan een vierdegraadsfunctie vier of drie of twee of een of geen nulpunten hebben, zie figuur 3.18.



Figuur 3.18: Vierdegraadsfuncties hebben vier, drie, twee, een, of geen nulpunt(en)

Een vijfdegraadsfunctie kan een, twee, drie, vier of vijf nulpunten hebben. In het algemeen geldt:

- Een n -degraadspolynoom heeft ten hoogste n nulpunten.
- Als n oneven is, heeft een n -degraadspolynoom tenminste één nulpunt, als n even is eventueel geen nulpunten.

Zie verder paragraaf 3.22 voor een beschouwing over de nulpunten van veeltermen.

3.17 Rationale functies

Zoals er rationale getallen bestaan, zijn er ook rationale functies: het quotiënt van twee veeltermen. Een rationale functie heeft de vorm

$$f(x) = \frac{t(x)}{n(x)}, \quad n(x) \neq 0(x) \quad (3.12)$$

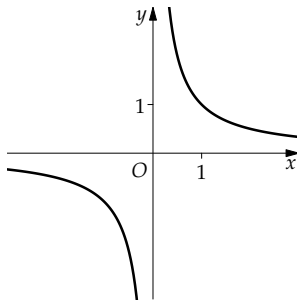
waarbij $t(x)$ en $n(x)$ polynomen zijn, en $n(x)$ niet het nulpolynoom is. Voorbeelden daarvan zijn:

- $f(x) = \frac{x-3}{2x+1}$
- $g(x) = \frac{2x}{4-x^2}$
- $h(x) = \frac{x^2-x-1}{2x^3+4x-5}$

Volgens 3.12 kan $n(x)$ een constante zijn (ongelijk aan nul), in dat geval krijg je een gewone veelterm, die ook wel een *gehele* rationale functie heet. De gehele rationale functies vallen dus samen met de veeltermen.

Rationale functies zijn als zodanig interessant als de noemer niet constant is, dus als de graad van de noemer ten minste 1 is. Er is dan sprake van een *gebroken* rationale functie. In de praktijk wordt met deze terminologie wat losjes omgegaan, en worden gebroken rationale functies meestal aangeduid met 'rationale functies'.

De standaard rationale functie is $f(x) = \frac{1}{x}$. De grafiek daarvan zie je in figuur 3.19.



Een gebroken rationale functie wordt in schoolboeken meestal *gebroken functie* genoemd.

Figuur 3.19: Grafiek van $y = \frac{1}{x}$

Een dergelijke grafiek heet een *hyperbool*. De hyperbool bestaat uit twee losse gedeelten: twee *takken*, een tak in het eerste kwadrant, en een in het derde kwadrant.

Voor grote positieve waarden van x gaan de functiewaarden naar nul. Ook voor grote negatieve waarden is dat het geval. De x -as is een *asymptoot* van de grafiek.

In de buurt van 0 gaan de functiewaarden naar $+\infty$ of naar $-\infty$. Ook de y -as is een asymptoot.

In het algemeen kunnen gebroken rationale functies een horizontale asymptoot hebben, zoals de x -as in figuur 3.19, en een of meer verticale asymptoten, zoals de y -as in figuur 3.19. Ze kunnen in sommige gevallen een scheve asymptoot hebben. Zie hoofdstuk 5 voor een uitgebreid onderzoek naar asymptoten.

3.18 Staartdeling met polynomen

Zoals je, eventueel met behulp van een staartdeling, de breuk $\frac{123}{5}$ kunt schrijven als $24\frac{3}{5}$, zo kun je ook rationale functies in verschillende vormen schrijven. En ook dat gaat met behulp van een staartdeling. Je kunt immers zowel de teller $t(x)$ als de noemer $n(x)$ van $\frac{t(x)}{n(x)}$ opvatten als de breuk van twee getallen, namelijk van de functiewaarden $t(x)$ en $n(x)$.

Voorbeeld 3.18. Pas een staartdeling toe op

$$f(x) = \frac{2x^3 + 3x - 4}{x - 2}, \quad x \neq 2$$

Oplossing. Merk op dat in de teller de term met x^2 ontbreekt. Schrijf de teller daarom als volgt: $2x^3 + 0x^2 + 3x - 4$. De staartdeling begint zo:

$$x-2 \ / \ 2x^3 + 0x^2 + 3x - 4 \ \backslash$$

Als eerste kijk je naar de term met de hoogste macht van x , dat is $2x^3$. Om met $x - 2$ de term $2x^3$ te maken, moet je met $2x^2$ vermenigvuldigen:

$$\begin{array}{r} x-2 \ / \ 2x^3 + 0x^2 + 3x - 4 \ \backslash \ 2x^2 \\ \underline{2x^3 - 4x^2} \end{array}$$

Het product van $2x^2$ en $x - 2$ is $2x^3 - 4x^2$, trek dit af van de teller en haal de volgende term erbij:

$$\begin{array}{r} x-2 \ / \ 2x^3 + 0x^2 + 3x - 4 \ \backslash \ 2x^2 \\ \underline{2x^3 - 4x^2} \\ 4x^2 + 3x \end{array}$$

De term met de hoogste macht is nu $4x^2$. Vermenigvuldig $x - 2$ met $4x$ om $4x^2$ te krijgen:

$$\begin{array}{r} x-2 \ / \ 2x^3 + 0x^2 + 3x - 4 \ \backslash \ 2x^2 + 4x \\ \underline{2x^3 - 4x^2} \\ 4x^2 + 3x \\ \underline{4x^2 - 8x} \end{array}$$

Trek het product af van de teller:

5

Limieten

HET begrip *limiet* vormt het fundament voor belangrijke technieken als differentiëren en integreren. Beide technieken kennen eindeloos veel toepassingen, zowel binnen als buiten de wiskunde. Het is dan ook essentieel voor een goed begrip van de analyse, het enigszins lastige concept limiet te bestuderen.

5.1 De linker- en rechterlimiet van een functie

Laten we beginnen met de tamelijk onschuldig uitziende rationale functie:

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

Er is maar één probleempje, de noemer is nul voor $x = 1$. Sterker nog, voor $x = 1$ is de teller ook nul, en dit levert $\frac{0}{0}$. De functie is dus ongedefinieerd voor $x = 1$. Voor alle andere waarden van x is er geen probleem.

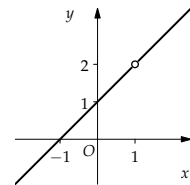
De functie $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ kun je ook schrijven als

$$f(x) = \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = x + 1, \quad x \neq 1$$

Dit is een lineaire functie. De grafiek ervan zie je in figuur 5.1, het is een rechte lijn met een 'gaatje' bij $x = 1$. Zo'n gaatje heet ook wel een *perforatie*.

Je kunt kijken hoe de functie zich gedraagt in de buurt van $x = 1$. Tabel 5.1 bevat een paar functiewaarden rondom $x = 1$.

x	0.5	0.9	0.95	0.99	1	1.01	1.05	1.1	1.5
$f(x)$	1.5	1.9	1.95	1.99		2.01	2.05	2.1	2.5



Figuur 5.1: $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$, grafiek met een perforatie

Tabel 5.1: $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

Als je je concentreert op de linkerhelft van deze tabel, zie je daar en ook in figuur 5.1: bij toename van x van 0.5 naar 0.99, neemt de functiewaarde toe van 1.5 naar 1.99. De functiewaarde komt steeds dichterbij 2, overigens zonder de waarde 2 ooit te bereiken. Voor dit verschijnsel hebben we een speciale naam: we zeggen dat de *linkerlimiet* gelijk is aan 2. Het heet linkerlimiet omdat x van de linkerkant naar 1 nadert. De notatie hiervoor is heel compact:

$$\lim_{x \uparrow 1} f(x) = 2 \quad (5.1)$$

Merk op dat het pijltje van onder naar boven wijst. Deze compacte uitdrukking in woorden luidt: *de limiet van $f(x)$, als x van links naar 1 nadert, is gelijk aan 2*. Of korter (en slordiger): de linkerlimiet in $x = 1$ is 2.

Zowel notatie (5.1) als de slordige uitspraak kan verwarring oproepen: er staat *niet* dat x gelijk aan 1 is, of dat $f(x)$ gelijk is aan 2. De bedoeling van de notatie is te zeggen dat de functiewaarde willekeurig dicht bij 2 komt, als je de waarde van x vanaf de linkerkant maar ver genoeg naar 1 schuift.

Wat voor de linkerkant van de tabel en de grafiek geldt, geldt ook voor de rechterkant. Als x afneemt van 1.5 naar 1.01, neemt de functiewaarde af van 2.5 naar 2.01. Ook deze waarden komen steeds dichterbij 2. De benaming hiervoor is *rechterlimiet*, omdat x van de rechterkant naar 1 nadert. De notatie voor de rechterlimiet is:

$$\lim_{x \downarrow 1} f(x) = 2 \quad (5.2)$$

In dit geval wijst het pijltje van boven naar beneden. Je kunt deze uitdrukking als volgt uitspreken: *de limiet van $f(x)$, als x van rechts naar 1 nadert, is gelijk aan 2*. Of ook: de rechterlimiet in $x = 1$ is 2.

De linker- en rechterlimiet zijn dus een middel om te onderzoeken hoe een functie zich gedraagt in de buurt van een bepaald punt, zelf als de functie eventueel niet in dat punt is gedefinieerd (maar wel in de directe omgeving van dat punt).

Om ruimte in verticale richting te besparen, komt in gedrukte teksten ook de notatie $\lim_{x \uparrow 1} f(x)$ voor.

In veel Engelstalige literatuur wordt de linkerlimiet genoteerd met $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ en de rechterlimiet met $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$. Het minteken boven de 1 geeft aan dat je van de negatieve/linkerkant komt, het plusteken dat je van de positieve/rechterkant het getal 1 nadert.

Voorbeeld 5.1. Gegeven is de functie $f(x) = \frac{x - \frac{1}{2}}{x - \frac{1}{2}}, x \neq \frac{1}{2}$.

Bepaal de linker- en rechterlimiet in $x = \frac{1}{2}$.

Oplossing. $f(x)$ is niet gedefinieerd in $x = \frac{1}{2}$, als je $x = \frac{1}{2}$ invult krijg je $\frac{0}{0}$. Als x , van links komend, naar $\frac{1}{2}$ gaat, is de functiewaarde steeds gelijk aan 1. Zie ook de tabel hieronder. Daarom is $\lim_{x \uparrow \frac{1}{2}} f(x) = 1$.

x	0	0.2	0.4	0.49	0.5	0.51	0.6	0.8	2
$f(x)$	1	1	1	1		1	1	1	1

Iets dergelijks geldt als x van rechts naar $\frac{1}{2}$ nadert.

Dus $\lim_{x \downarrow \frac{1}{2}} f(x) = 1$. In figuur 5.2 zie je de grafiek van f , waarin dit wordt bevestigd. ▲

In de hier gegeven voorbeelden zijn de linker- en rechterlimiet steeds aan elkaar gelijk. Dat hoeft niet altijd het geval te zijn, zoals te zien is in het volgende voorbeeld.

Voorbeeld 5.2. Gegeven is de volgende functie

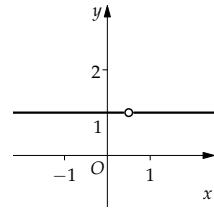
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + 1 & \text{voor } x \leq 2 \\ -(x - 1)(x - 5) & \text{voor } x > 2 \end{cases}$$

Onderzoek de linker- en rechterlimiet in $x = 2$.

Oplossing. Het onderzoeken van de linker- en rechterlimiet komt neer op het beantwoorden van de vraag: hoe gedraagt de functie zich als je van links naar $x = 2$ gaat, en hoe gedraagt hij zich als je van rechts naar $x = 2$ gaat?

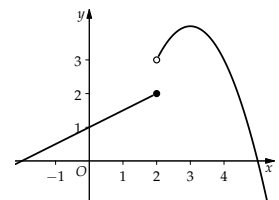
Het (laten) tekenen van een grafiek en het berekenen van een aantal functiewaarden kunnen daarbij erg behulpzaam zijn. In figuur 5.3 zie je, van links komend, de functiewaarden tot 2 naderen. Dus $\lim_{x \uparrow 2} f(x) = 2$. Het is zelfs zo dat $f(2) = 2$, ook al is dat voor het bestaan van de limiet niet noodzakelijk, zoals je in de vorige voorbeelden hebt kunnen zien.

Aan de andere kant, als x van rechts naar 2 nadert, naderen de functiewaarden naar 3, dat wil zeggen dat $\lim_{x \downarrow 2} f(x) = 3$,



Figuur 5.2:
 $f(x) = \frac{x - \frac{1}{2}}{x - \frac{1}{2}}, x \neq \frac{1}{2}$

Tabel 5.2:
 $f(x) = \frac{x - \frac{1}{2}}{x - \frac{1}{2}}, x \neq \frac{1}{2}$



Figuur 5.3: de linkerlimiet $\lim_{x \uparrow 2} f(x)$ en de rechterlimiet $\lim_{x \downarrow 2} f(x)$ zijn verschillend

ondanks het feit dat $f(2) = 2$. Dus in dit geval zijn de linker- en rechterlimiet niet aan elkaar gelijk. ▲

Voorbeeld 5.3. Onderzoek de linker- en rechterlimiet in $x = 0$ van

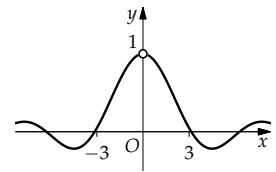
$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

Oplossing. Duidelijk is dat $f(x)$ niet gedefinieerd is in 0, omdat

$$f(0) = \frac{\sin(0)}{0} = \frac{0}{0}$$

Verder kun je opmerken dat $f(x)$ een even functie is, er geldt immers $f(-x) = \frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{-\sin x}{-x} = \frac{\sin x}{x} = f(x)$. Dat betekent dat $f(x)$ zich links en rechts van 0 op dezelfde manier gedraagt. Je hoeft dus (bijvoorbeeld) alleen de rechterlimiet te onderzoeken.

Een grafiek en een tabel met functiewaarden zijn daarbij weer behulpzaam. In de grafiek in figuur 5.4 is duidelijk dat $\lim_{x \downarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Onderstaande tabel met functiewaarden bevestigt dat.



Figuur 5.4: $f(x) = \frac{\sin x}{x}$

x	1	0.5	0.1	0.01	0.001
$f(x)$	0.841	0.959	0.998	0.99998	0.9999998

Tabel 5.3: $f(x) = \frac{\sin x}{x}$

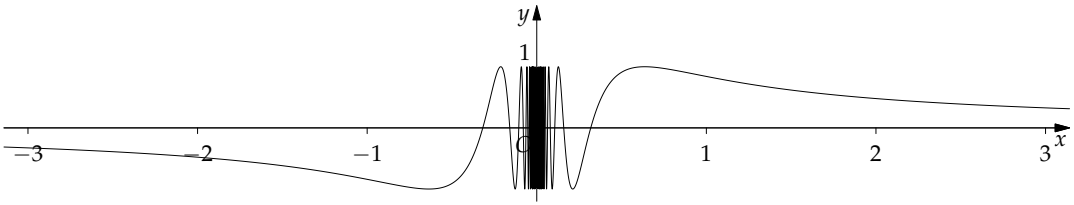
Het lijkt er dus op dat $\lim_{x \downarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \uparrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Nu is aflezen uit een grafiek geen hard bewijs; zie paragraaf 5.18 voor een uitvoeriger bespreking van deze limiet. ▲

Voorbeeld 5.4. Onderzoek de rechterlimiet in $x = 0$ van

$$f(x) = \sin \frac{1}{x}$$

Oplossing. Probleem met de functie $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ is, dat $\frac{1}{x}$ oneindig groot wordt als $x \downarrow 0$. En voor die grote waarden van $\frac{1}{x}$ blijft $\sin \frac{1}{x}$ slingeren tussen -1 en $+1$.

In figuur 5.5 zie je de grafiek van $f(x)$ rond $x = 0$. De slingeringen komen steeds dichterbij elkaar, zodat het er uitziet als een dikke zwarte brij. Hoe komt het dat de sinus in de buurt van 0



Figuur 5.5: $f(x) = \sin \frac{1}{x}$

dit gedrag vertoont? Bekijk eens de volgende rij getallen:

$$\frac{2}{2\pi}, \frac{2}{3\pi}, \frac{2}{4\pi}, \frac{2}{5\pi}, \frac{2}{6\pi}, \frac{2}{7\pi}, \dots \rightarrow 0$$

De noemer van deze getallen wordt steeds groter, dus de getallen zelf worden steeds kleiner en naderen tot 0. Als je deze getallen achtereenvolgens in $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ invult, krijg je:

$$\sin \frac{2\pi}{2}, \sin \frac{3\pi}{2}, \sin \frac{4\pi}{2}, \sin \frac{5\pi}{2}, \sin \frac{6\pi}{2}, \sin \frac{7\pi}{2}, \dots$$

Dit levert de volgende functiewaarden:

$$f(x) \begin{array}{l} \left| \begin{array}{cccccc} \sin \pi & \sin \frac{3}{2}\pi & \sin 2\pi & \sin \frac{5}{2}\pi & \sin 3\pi & \sin \frac{7}{2}\pi & \dots \\ 0 & -1 & 0 & +1 & 0 & -1 & \dots \end{array} \right.$$

Dus hoe dicht je ook bij 0 komt, $\sin \frac{1}{x}$ blijft slingeren tussen -1 en $+1$.

Conclusie: $\lim_{x \downarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ bestaat niet. ▲

5.2 De limiet in een punt

In de vorige paragraaf heb je voorbeelden van een linker- en rechterlimiet in een punt gezien. Soms zijn de linker- en rechterlimiet aan elkaar gelijk, zoals in de voorbeelden 5.1 en 5.3. Soms zijn de linker- en rechterlimiet verschillend, zoals in voorbeeld 5.2. Soms bestaat zo'n limiet niet, zoals in voorbeeld 5.4.

In de eerste gevallen, als de linker- en rechterlimiet in een punt a dezelfde waarde L hebben, kunnen we spreken van *de* limiet in dat punt, en schrijven $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ (met een horizontaal pijltje).

formeel doen door de absolute waarde van de sinus te nemen:

$$\int_0^{2\pi} |\sin x| dx$$

Voor $|\sin x|$ hebben we niet meteen een primitieve, maar op $[0, 2\pi]$ geldt:

$$|\sin x| = \begin{cases} \sin x & \text{als } x \in [0, \pi] \\ -\sin x & \text{als } x \in [\pi, 2\pi] \end{cases}$$

Dus

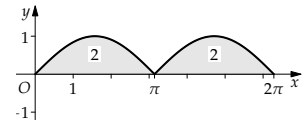
$$\int_0^{2\pi} |\sin x| dx = \int_0^{\pi} \sin x dx + \int_{\pi}^{2\pi} (-\sin x) dx$$

Uit voorbeeld 8.10 is de eerste integraal bekend: $\int_0^{\pi} \sin x dx = 2$.

De tweede integraal is

$$\int_{\pi}^{2\pi} (-\sin x) dx = \cos x \Big|_{\pi}^{2\pi} = \cos 2\pi - \cos \pi = 1 - (-1) = 2$$

Dus $\int_0^{2\pi} |\sin x| dx = 2 + 2 = 4$. Dit antwoord is niet verwonderlijk als je de grafiek van $|\sin x|$ in figuur 8.20 bekijkt.



Figuur 8.20: De grafiek van $|\sin x|$

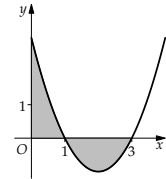
Voorbeeld 8.11. Bereken de oppervlakte ingesloten door de x -as en de grafiek van $f(x) = (x-1)(x-3)$ op het interval $[0, 3]$, zie figuur 8.21.

Oplossing. De nulpunten van f bevinden zich bij $x = 1$ en $x = 3$.

Voor het integreren is het makkelijker als je $f(x)$ schrijft als $f(x) = x^2 - 4x + 3$. Je kunt de gevraagde oppervlakte berekenen met

$$\begin{aligned} \int_0^3 |x^2 - 4x + 3| dx &= \int_0^1 x^2 - 4x + 3 dx + \int_1^3 -(x^2 - 4x + 3) dx \\ &= \left(\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x\right) \Big|_0^1 - \left(\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x\right) \Big|_1^3 \\ &= \left(\frac{1}{3} - 2 + 3\right) - \left(9 - 18 + 9 - \frac{4}{3}\right) = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

▲



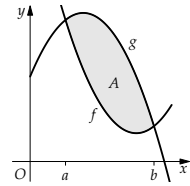
Figuur 8.21: De grafiek van $f(x) = (x-1)(x-3)$

8.9 De oppervlakte tussen twee grafieken

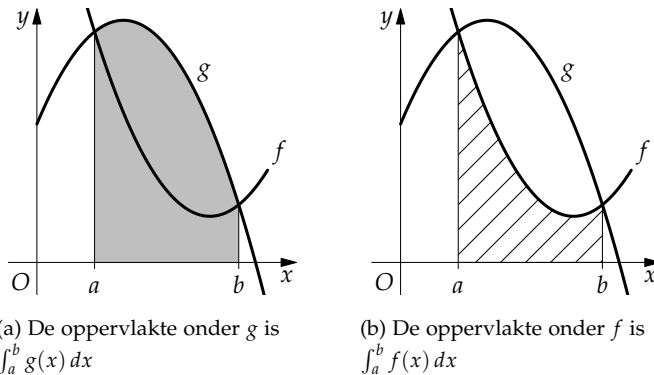
Een vraag die nauw samenhangt met de berekening van een oppervlakte ingesloten door een grafiek en de x -as, is hoe je

de oppervlakte tussen twee grafieken berekent. In figuur 8.22 zie je daar een voorbeeld van: het lichtgrijze gebied A wordt ingesloten door de grafieken van f en g . De snijpunten van f en g bevinden zich bij $x = a$ en $x = b$.

De oppervlakte van dit gebied kun je berekenen door eerst de oppervlakte onder g op het interval $[a, b]$ te bepalen, dus van het donkergrijze gebied in figuur 8.23(a). Vervolgens trek je daar de oppervlakte van het gearceerde gebied uit figuur 8.23(b) vanaf.



Figuur 8.22: Het gebied A ingesloten door de grafieken van f en g



(a) De oppervlakte onder g is $\int_a^b g(x) dx$

(b) De oppervlakte onder f is $\int_a^b f(x) dx$

Figuur 8.23: De oppervlakte tussen de grafieken bereken je door $\int_a^b g(x) dx$ en $\int_a^b f(x) dx$ van elkaar af te trekken

De oppervlakte tussen f en g bereken je in dit geval dus met

$$A = \int_a^b g(x) dx - \int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) - f(x) dx \quad (8.6)$$

Voorbeeld 8.12. Bereken de oppervlakte van het gebied ingesloten door de grafieken van $f(x) = x^2 - 6x + 9$ en $g(x) = -x^2 + 3x + 2$.

Oplossing. Het is verstandig eerst een tekening te maken om goed zicht te hebben op de situatie. De grafieken van f en g uit dit voorbeeld staan in figuur 8.22 (en 8.23). Het vinden van de snijpunten van beide grafieken is essentieel. Uit $f(x) = g(x)$ volgt

$$x^2 - 6x + 9 = -x^2 + 3x + 2 \iff 2x^2 - 9x + 7 = 0 \iff (x - 1)(2x - 7) = 0$$

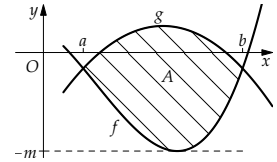
De snijpunten bevinden zich bij $x = 1$ en bij $x = 3\frac{1}{2}$.

De oppervlakte van het ingesloten deel is dus

$$\int_1^{3\frac{1}{2}} g(x) - f(x) dx = \int_1^{3\frac{1}{2}} -2x^2 + 9x - 7 dx = -\frac{2}{3}x^3 + \frac{9}{2}x^2 - 7x \Big|_1^{3\frac{1}{2}}$$

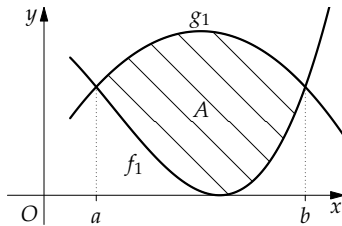
Enig rekenwerk levert als antwoord $5\frac{5}{24}$ voor de oppervlakte. ▲

Het voorgaande voorbeeld is in zoverre ideaal, dat beide functies positief zijn op interval $[a, b]$. Maar wat als dat niet het geval is, zoals in figuur 8.24?



Figuur 8.24: Hoe bereken je de oppervlakte tussen de grafieken van f en g ?

Je kunt, in gedachten, de grafieken van f en g omhoog schuiven. Zoals je ziet is het minimum op het interval $[a, b]$ gelijk aan $-m$. Als je beide grafieken over een afstand m omhoog schuift, zijn ze niet meer negatief op het interval $[a, b]$. De oppervlakte A verandert door het schuiven niet. Het resultaat ziet eruit als in figuur 8.25.



Figuur 8.25: De oppervlakte tussen de grafieken van f_1 en g_1 bereken je met $A = \int_a^b g_1(x) - f_1(x) dx$

De oppervlakte A kun je nu berekenen: $A = \int_a^b g_1(x) - f_1(x) dx$. Wegens het schuiven over afstand m geldt: $g_1(x) = g(x) + m$ en $f_1(x) = f(x) + m$. Dus:

$$\begin{aligned} A &= \int_a^b g_1(x) - f_1(x) dx = \int_a^b [g(x) + m] - [f(x) + m] dx \\ &= \int_a^b g(x) - f(x) dx \end{aligned} \quad (8.7)$$

Formule (8.7) is hetzelfde als formule (8.6), het maakt dus niet uit of de grafieken zich onder of boven de x -as bevinden, zolang de ene functie, in dit geval g , maar groter is dan de andere op het hele interval.

Als de functies elkaar op het interval afwisselen wat grootte

betreft, zoals in figuur 8.26, dan splits je het interval in gedeelten waarin $f(x) \geq g(x)$, en in gedeelten waarin $g(x) \geq f(x)$.

1. daar waar $f(x) \geq g(x)$, bereken je de oppervlakte van het gebied tussen de functies met $\int_a^b f(x) - g(x) dx$
2. daar waar $g(x) \geq f(x)$, bereken je de oppervlakte van het gebied tussen de functies met $\int_a^b g(x) - f(x) dx$

Dus in het algemeen kun je volstaan met de absolute waarde van het verschil tussen de twee functies, en geldt voor de totale oppervlakte van het gebied A tussen de grafieken van twee functies f en g op een interval $[a, b]$:

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx \quad (8.8)$$

De oppervlakte van het gebied ingesloten door de x -as en de grafiek van een functie f op een interval $[a, b]$ is hier een speciaal geval van. De x is heft immers $g(x) = 0$ als vergelijking. Dit invullen in (8.8) levert:

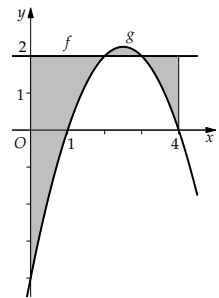
$$A = \int_a^b |f(x)| dx \quad (8.9)$$

In feite is deze formule toegepast in voorbeeld 8.11.

Voorbeeld 8.13. Bereken de oppervlakte van het gebieden ingesloten door de grafieken van $f(x) = 2$ en $g(x) = -(x-1)(x-4)$ op het interval $[0, 4]$.

Oplossing. Laat eerst een schets van de grafieken maken, zie figuur 8.26. Op het interval $[0, 4]$ zijn f en g om beurten groter en kleiner. Het gaat er nu om de snijpunten van f en g te bepalen. Uit $-(x-1)(x-4) = 2$ volgt $x^2 - 5x + 6 = 0$, oftewel $(x-2)(x-3) = 0$, dus er is een snijpunt bij $x = 2$ en bij $x = 3$. Het grijze gebied bestaat uit drie delen: op het interval $[0, 2]$, op het interval $[2, 3]$ en op het interval $[3, 4]$. Deze oppervlakten bereken je met:

$$\int_0^2 f(x) - g(x) dx + \int_2^3 g(x) - f(x) dx + \int_3^4 f(x) - g(x) dx$$



Figuur 8.26: Het gebied ingesloten door de grafieken van f en g op het interval $[0, 4]$

Index

- , 168
- \cap , 151
- \circ , 153, 168
- (, 38
- \forall , 16
- \setminus , 40
- \div , 19
- /, 19
- D , 98
- d , 66
- δ -omgeving, 41, 181
- df , 271
- dx , 271
- \in , 16
- \notin , 17
- e , 24, 57, 150
- ϵ -omgeving, 41, 181
- $>$, 18
- gr , 111
- \langle , 40
- \rangle , 40
- $<$, 18
- |, 18, 31
- \mathbb{N} , 15
- \vee , 41
- π , 24
- \mathbb{Q} , 19
- \mathbb{R} , 26
- \mathbb{R}^2 , 66
- Σ , 64
- $\sqrt{2}$, 24
- \mathbb{Z} , 18

- aanliggende zijde, 131
- abc-formule, 97
- Abramowitz and Stegun, 312
- absolute waarde, 41, 166
 - en afstand, 41
 - functie, 166
 - ongelijkheid, 42
- acos, 159
- afbeelding, 87
- afgelegde weg
 - snelheid, 302
- afgeleide, 221
 - arccos, 259
 - arcsin, 257
 - arctan, 258
 - $\ln x$, 259
 - $\ln|x|$, 260
 - x^r , 246
 - cosinus, 244
 - definitie in een punt, 225
 - eigenschappen, 261
 - exponentiële functie, 247
 - inverse, 255
 - limietdefinitie, 223
 - linker, 230
 - notaties, 235
 - rechter, 230
 - sinus, 243
 - standaardfuncties, 261
 - tangens, 245
 - tweede, 251
- afgeleide functie, 224
- afstand
 - en absolute waarde, 41
 - tussen punten getallenlijn, 41
 - tussen punten in vlak, 66
- aftrekking, 17
- algoritme
 - Euclides, 30, 32
- arccos, 161
 - afgeleide, 259
- arcsin, 159
 - afgeleide, 257
- arctan, 162
 - afgeleide, 258
- argument, 87
- asin, 159
- associativiteit
 - optelling, 17, 27
 - vermenigvuldiging, 17, 27
- asymptoot, 114, 194, 200
 - horizontale, 114, 200
 - rationale functie, 114
 - scheve, 114, 204
 - schuine, *zie* scheve
 - tangens, 140
 - verticale, 114, 194
- atan, 159

- b.n., 141
- backslash, 40
- beeld, 87
 - van functie, 87
- beeldverzameling, 87
- begrensde functie, 287
- behalve, 40
- bepaalde integraal, 306
 - substitutie, 314
- bereik, 87
- Bernouilli, Jacob, 217
- bestaat niet, 141
- bgsin, 159
- bgsin, 159
- bgtan, 159
- binair cijfer, 80
- binair getal, 80
 - som, 82

- binary digit, 80
- binomiaalcoëfficiënt, 70
- binomium van Newton, 69, 70
- bit, 80
- boogsinus, 159
- boven-entier, 168
- bovengrens, 287
 - sigma-notatie, 64
 - substitutie, 314
- breuk, 19
 - decimale, 20
 - notatie, 19
- breuksplitsen, 327
- buigpunt, 252
 - horizontaal, 251
- byte, 80

- Cauchy, Augustin, 236
- ceil, 168
- cirkel
 - eenheids-, 133
 - oppervlakte, 316
- cirkelsector, 131, 142, 210
 - oppervlakte, 131
- classificatie
 - tweedegraadsfuncties, 100
- coëfficiënt
 - veelterm, 89
- coördinaat, 65, 66
- codomein, 87
- commutativiteit
 - optelling, 16, 27
 - vermenigvuldiging, 17, 27
- complementair, 134
- concaaf, 252
- constante term, 111
- continu
 - en differentieerbaar, 231
 - functie, 186
- continuïteit, 186
- convergent
 - integraal, 337
- convex, 252
- cos, 132, 134
- cosecans, 129
- cosinus, 131
 - afgeleide, 244
 - eenheidscirkel, 133
 - grafiek, 138
 - inverse, 161
- cosinusregel, 149
- cot, 129
- cotangens, 129
- csc, 129
- cyclometrische functie, 159
 - afgeleide, 257
 - primitieve, 323

- D , 98
- δ -omgeving, 41, 181
- d , 66
- dalen, 228
- dan en slechts dan als, 25
- decimale breuk, 20
- definitie
 - afgeleide in een punt, 225
- delen
 - synthetisch, 123
- deler
 - definitie, 30
 - notatie, 31
 - van polynoom, 117
- deling, 17
- delingsalgoritme, 118
- derdegraadspolynoom, 111
- derdemachtswortel, 48, 159
- desda, 25
- df , 271
- differentiëren, 221, 225
- differentiaal, 235, 271
 - integreren, 319
 - lineaire benadering, 273
 - partieel integreren, 320
- differentiaalquotiënt, 221, 223
- differentie, 222
- differentieerbaar
 - en continu, 231
- differentieerbaarheid, 228
 - rechts, 230
- differentieerbare functie, 228
- differentiequotiënt, 221, 222
- discontinu, 187
- discontinuïteit
 - sprong-, 187
- discriminant, 98
- distributieve eigenschap, 27
- divergent
 - integraal, 337
- domein, 87
- doorsnede, 151
- driedeling, 27, 37
- driehoek van Pascal, 71
- dubbele hoek, 146
- dubbellogaritmisch papier, 166
- duiventilprincipe, 22
- dx , 271

- ϵ -omgeving, 41, 181
- e , 24, 57, 150
- eenheidscirkel, 133
 - cosinus, 133
 - sinus, 133, 136
 - tangens, 135
- eerstegraadsfunctie, 105
- eigenschappen
 - absolute waarde, 41
 - afgeleide, 261
 - integraal, 301
 - logaritmen, 54
 - machten, 47
 - ongelijkheden, 36
 - van $\lim_{x \rightarrow a}$, 184, 185
 - van $\lim_{x \rightarrow \infty}$, 202

- eindig interval, 38
- element van, 16
- Elementen van Euclides, 30
- encyclopedie van rijen, 72
- enkellogaritmisch papier, 164
- entier, 168
- Euclides, 30
 - algoritme van, 30
 - Elementen, 30
- even
 - functie, 139
 - getal, 18
- evenmachtswortel, 48
- $\exp(x)$, 151
- expliciet maken (variabele), 158
- expliciete formule (rij), 73
- exponent, 44
- exponentiële functies, 149
- extreme waarde, 248

- f' , 225
- f'' , 251
- factor, 16, 69
- factorstelling, 118
- Fibonacci, 72
- floor, 168
- formules
 - dubbele hoek, 146
 - goniometrische, 142
 - hoekensom en -verschil, 145
- functie, 87
 - sgn, 167
 - absolute waarde, 166
 - afgeleide, 221
 - argument, 87
 - beeld, 87
 - beeldverzameling, 87
 - begrensd, 287
 - bereik, 87
 - continu in een punt, 186
 - differentieerbaar, 228
 - even, 139
 - exponentiële, 149
 - gebroken, 113
 - goniometrische, 129
 - identieke, 155
 - injectief, 160
 - integreerbaar, 287
 - inverse, 153
 - kwadratische, 89
 - lineaire, 105
 - negatief-exponentiële, 150
 - oneven, 138
 - op, 88
 - periodieke, 137
 - product, 151
 - quotiënt, 151
 - rationale, 113
 - samengestelde, 152
 - signum, 167
 - som, 151
 - stuksgewijs gedefinieerd, 167
 - surjectief, 88
 - transformatie, 169
 - translatie, 169
 - verschil, 151
- functieonderzoek, 265
- functiewaarde, 87

- $>$, 18
- gaatje, 175
- gebroken functie, 113
- gebroken rationale functie, 113
- geheel getal, 18
- gehele coëfficiënten, 125
- gehele rationale functie, 113
- Gelfond, Alexander, 26
- gelijknamig, 29
- gemiddelde functiewaarde, 304
- gemiddelde helling, 222
- gemiddelde snelheid, 304
- geordend paar, 66
- gesloten
 - voor optelling, 16
 - voor vermenigvuldiging, 17
- gesloten interval, 38
- getal, 15
 - binair, 80
 - e, 24, 57, 150
 - even, 18
 - geheel, 18
 - irrationaal, 24
 - natuurlijk, 15
 - oneven, 19
 - π , 24
 - rationaal, 19
 - reëel, 26
- getallenlijn, 37
- getallenpaar, 65
- getalverzamelingen, 15
- gevalsonderscheiding, 44
- ggd, 30
- gonioformules, 142
 - hoekensom en -verschil, 145
 - product naar som, 147
 - som naar product, 148
- goniometrie, 129
- goniometrische functie, 129
- waarden, 140
- gr, 111
- graad
 - van polynoom, 111
- grafiek
 - transformatie, 169
 - verschuiven, 169
 - vervormen, 169
- Griekse letters, 345
- grondtal, 44
 - logaritme, 52
 - weglaten, 55

- grootste gemene deler, 30
- half-open interval, 38
- Handbook of Mathematical Functions, 312
- helling
gemiddelde, 222
- hellingfunctie, 221, 227
- hellinggetal, 106
- het kanon, 97
- hoek
in radialen, 129
negatief, 131
- hoekensom, 144
- hoekensom en -verschil, 145
- hoekmeetkunde, 129
- hogere machtswortel, 49
- hoofdstelling
algebra, 331
integraalrekening, 290
- horizontaal buigpunt, 251
- horizontale asymptoot, 200
- Horner, William George, 120
- Hornerschema, 121
- Huygens, Christiaan, 235
- hyperbool, 114
asymptoot, 114
tak, 114
- hypotenusa, 131
- identieke functie, 155
- impliciete formule (rij), 73
- in, 16
- index, 64
- indirecte formule (rij), 73
- inductie
volledige, 67
- inductie-onderstelling, 68
- inductieveronderstelling, 68
- infinitesimaal, 235, 236
- infinitesimaalrekening, 236
- injectie, 160
- integraal, 281
bepaalde, 306
bovengrens, 287
constante, 306
convergent, 337
divergent, 337
eigenschappen, 301
hoofdstelling, 290
onbepaalde, 306
ondergrens, 287
oneigenlijke, 335
substitutie, 309, 312
- integraalteken, 287
- integrand, 309
- integratieconstante, 306
- integreerbaar, 287, 288
- integreerbare functie, 287, 288
- integreren, 294
differentiaal, 319
partieel, 318
- interval, 38
begrensd, 38
eindig, 38
gesloten, 38
half-gesloten, 38
half-open, 38
onbegrensd, 38
oneindig, 38
open, 38
schoolboek, 40
- intervalnotatie, 39
- inverse
 x^n , 159
afgeleide, 255
optelling, 27
vermenigvuldiging, 27
- inverse functie, 153
cosinus, 161
derdemachtswortel, 159
grafiek, 156
lineaire, 155
sinus, 159
- tangens, 162
wortelfunctie, 158
- inverse functiestelling, 255
- irrationaal getal, 24
- irreducibel, 332
- <, 18
- kanon, het, 97
- kettingregel, 241, 309
- kgv, 33
- kleinste gemene veelvoud, 33
- klokrekenen, 31
- koorde, 222
- kopcoëfficiënt, 89, 111
negatieve, 112
- kritiek punt, 250
- kritisch punt, 250
- kwadraatafsplitsen, 93
bij algemene vorm, 96
- kwadrant, 66
- kwadratische functie, 89
- Lambert, Johann Heinrich, 24
- Leibniz, Gottfried, 235
- lijn
algemene vergelijking, 110
door twee punten, 108
vergelijking bepalen, 107
verticaal, 109
- limiet
eigenschappen $\lim_{x \rightarrow a}$, 184, 185
eigenschappen $\lim_{x \rightarrow \infty}$, 202
in een punt, 179
linker, 175
oneigenlijk, 193
rechter, 175
- limietdefinitie afgeleide, 223
- lineaire benadering, 273

- lineaire functie, 105
- linearisering, 272
- lineariteitseigenschap, 302
- linkerafgeleide, 230, 250
- linkerlimiet, 175
- linkeromgeving, 41
- linkersom, 283
- logaritme, 51
 - afgeleide, 259
 - eigenschappen, 54
 - grondtal, 52
 - natuurlijke, 57, 162
 - overgang ander grondtal, 57
 - papier, 164
 - primitieve, 322
 - rekenmachine, 52
- logaritmepapier, 164
- logaritmisch papier, 164

- macht, 44
 - eigenschappen, 47
- machtsfunctie
 - afgeleide, 246
- meetkundige rij, 76
 - som, 77
- methode van Horner, 120
- middensom, 285
- mod, 31
- modulo, 31
- monische polynoom, 89

- \mathbb{N} , 15
- n boven k, 70
- Napier, John, 52
- natuurlijk getal, 15
- natuurlijke logaritme, 57, 162
- negatief-exponentiële functie, 150
- neutraal element
 - optelling, 27
 - vermenigvuldiging, 27
- Newton
 - binomium, 69, 70
 - Newton, Isaac, 70
 - niet differentieerbaar, 228
 - notatie
 - afgeleide, 235
 - nulpolynoom, 111
 - nulpunt
 - parabool, 92
 - polynoom, 125
 - nulpuntenvorm, 90, 101
 - nummering termen, 74

- \vee , 41
- OEIS, 72
- of, 41
- omgeving, 40
 - δ -, 41, 181
 - ϵ -, 41, 181
- onbegrensd interval, 38
- onbepaalde integraal, 306
- onder-entier, 168
- ondergrens, 287
 - sigma-notatie, 64
 - substitutie, 314
- oneigenlijke integraal, 335
 - soort 1, 336
 - soort 2, 339
- oneigenlijke limiet, 193
- oneindig interval, 38
- oneven
 - functie, 138
 - getal, 18
- onevenmachtswortel, 48
- ongelijkheid, 36
 - absolute waarde, 42
- op, 88
- open interval, 38
- oppervlakte
 - cirkel, 316
 - cirkelsector, 131
 - onder en boven de x -as, 296
 - radiaal, 131
 - tussen grafieken, 297
- oppervlakte benaderen, 281
- optelling, 16
 - associativiteit, 17
- optimaliseringsprobleem, 274
- ordering, 36
- overgang ander grondtal
 - logaritme, 57
- overstaande zijde, 131

- π , 24
- parabool
 - nulpunt, 92
- partieel integreren, 318
 - differentiaal, 320
- partieelbreuk, 328
- partitie, 286
- Pascal, Blaise, 71, 235
- Pascal, driehoek, 71
- perforatie, 175
- periode, 137
- periodieke functie, 137
- pigeonhole-principe, 22
- platte vlak, 65
- polynoom
 - coëfficiënt, 89
 - constante term, 111
 - deler, 117
 - derdegraads, 111
 - gehele coëfficiënten, 125
 - graad, 111
 - graad twee, 89
 - kopcoëfficiënt, 89, 111
 - monische, 89
 - staartdeling, 115
 - synthetisch delen, 123
 - vierdegraads, 111
 - vijfdegraads, 111
- positiestelsel, 79
- primitieve, 291
 - $\ln x$, 322
 - cyclometrische functie, 323

- tangens, 311
- primitiveren, 292
- product, 16
 - functie, 151
- product naar som (gonio), 147
- productregel, 233
- puntsymmetrisch, 138

- Q, 19
- quotiënt, 17
 - functie, 151
- quotiëntregel, 236

- \mathbb{R} , 26
 - ordening, 36
- \mathbb{R}^2 , 66
- rad, 129
- radiaal, 129
 - booglengte, 130
 - oppervlakte, 131
- ratio, 76
- rationaal, 19
- rationaal getal, 19
- rationale functie, 113
 - asymptoot, 114
 - gebroken, 113
 - gehele, 113
- rationale wortels, 125
- rationeel, 19
- rc, 106
- reëel getal, 26
- rechterafgeleide, 230, 250
- rechterlimiet, 175
- rechteromgeving, 41
- rechtersom, 283
- rechthoekszijde, 131
- rechtsdifferentieerbaar, 230
- reciproke, 154
- recursieformule, 73
- recursieve formule (rij), 73
- rede, 76
- regel van Horner, 120
- rekenkundige rij, 72
 - som, 75
- rekenmachine
 - log-functie, 52
- relatie, 316
- repeterende breuk, 20
- reststelling, 118
- richtingscoëfficiënt, 106
- rico, 106
- Riemann, Bernhard, 287
- Riemannsom, 286
- rij, 72
 - directe formule, 73
 - expliciete formule, 73
 - impliciete formule, 73
 - indirecte formule, 73
 - meetkundige, 76
 - nummering termen, 74
 - recursieve formule, 73
 - rekenkundige, 72
 - som, 75, 77
- Roma, 282

- Σ , 64
- samengestelde functie, 152
- scalair, 232
- scalairregel, 232
- schaakbord, 78
- schema van Horner, 120
- scheve asymptoot, 204
- Schneider, Theodor, 26
- schoolboek
 - intervalnotatie, 40
- schuine asymptoot, *zie*
 - scheve asymptoot
- schuine zijde, 131
- sec, 129
- secans, 129
- sgn x , 289
- sigma-notatie, 64
- sigma-teken, 64
- signumfunctie, 167, 289
- sin, 132, 134
- sinus, 131
 - afgeleide, 243
- eenheidscirkel, 133, 136
 - grafiek, 136
 - inverse, 159
- snelheid
 - afgelegde weg, 302
- som, 16
 - binair getal, 82
 - functie, 151
 - meetkundige rij, 77
 - rekenkundige rij, 75
- som naar product (gonio), 148
- somregel, 232
- SOSCASTOA, 132
- sprongdiscontinuïteit, 187
- staartdeling, 20
 - polynomen, 115
- standaardfuncties
 - afgeleide, 261
- standaardlimiet, 208, 209, 211–217, 246
- standaardprimitieven, 306
- standaardvorm
 - wortel, 50
- startgetal, 106
- Stevin, Simon, 20, 52
- stijgen, 228
- stuksgewijs gedefinieerde functie, 167
- substitutie
 - bepaalde integraal, 314
 - bovengrens, 314
 - ondergrens, 314
- substitutiemethode, 309, 312
- surjectie, 88
- surjectief, 88
- symmetrieas, 99
- synthetisch delen, 123

- tak, 162
 - van hyperbool, 114
- tan, 132
- tangens, 131

- afgeleide, 245
- asymptoot, 140
- eenheidscirkel, 135
- grafiek, 139
- inverse, 162
- primitieve, 311
- tangent, 135
- tekendriehoek, 140
- tekenoverzicht, 248
- tekenoverzicht:beknopte
 - notatie, 249
- tekenschema, 248
- term, 16, 69
 - van rij, 72
- terugsubstitutie, 310, 315
- Thiende, 20
- top, 89
- topvorm, 90, 92, 93
- transformatie, 169
- transitiviteit, 37
- translatie, 169
 - x^2 , 90
- trichotomie, 27, 37
- tweede afgeleide, 251
- tweedegraadsfunctie, 89
 - classificatie, 100
 - nulpuntenvorm, 101
- tweedemachtswortel, 48
- uitgezonderd, 40
- veelterm, *zie* polynoom
- vermenigvuldiging
 - associativiteit, 17
 - commutativiteit, 17
 - gesloten, 17
- verschil, 17
 - functie, 151
- verschilrij, 78
- verschilverzameling, 40
- verschuiven, 169
- verschuiving, 90
- verticale asymptoot, 194
- verticale lijn, 109
- vervormen, 169
- verzamelingennotatie, 18
- vierdegraadspolynoom,
 - 111
- vierdemachtswortel, 48
- vierkantswortel, 48
- vijfdegraadspolynoom, 111
- vijfde machtswortel, 48
- volledige inductie, 67
- voor alle, 16
- $\sqrt{2}$, 24
- Welmer, 281
- WolframAlpha, 312
- wortel, 48
 - eigenschappen, 49
 - rationale, 125
 - standaardvorm, 50
 - van vergelijking, 92
- wortelformule, 97
- wortelfunctie, 158
- worteltruc, 50
- x -coördinaat, 66
- y -coördinaat, 66
- \mathbb{Z} , 18
- Zahlen, 18